

劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム における仲介者の影響

藤井海斗 (京都大学)

2026/8/17 @ JCCA2026 金沢

対象

社会厚生（社会全体の利得）が**劣モジュラ性**を満たすゲーム

（他者の行動が己に負の影響を与えるゲーム）

対象

社会厚生（社会全体の利得）が**劣モジュラ性**を満たすゲーム

（他者の行動が己に負の影響を与えるゲーム）

目標

均衡（安定した状態）における社会厚生の近似的最適性を保証すること

※ 均衡概念は**仲介者**の種類によってさまざま

対象 社会厚生（社会全体の利得）が**劣モジュラ性**を満たすゲーム
（他者の行動がつねに負の影響を与えるゲーム）

目標 均衡（安定した状態）における社会厚生の近似的最適性を保証すること
※ 均衡概念は**仲介者**の種類によってさまざま

既存研究 完備情報では、**相関均衡**は最適値の $1/2$ 近似（ $1/2$ 倍以上） [Vetta'02]

対象 社会厚生（社会全体の利得）が**劣モジュラ性**を満たすゲーム
（他者の行動がつねに負の影響を与えるゲーム）

目標 均衡（安定した状態）における社会厚生 of 近似的最適性を保証すること
※ 均衡概念は**仲介者**の種類によってさまざま

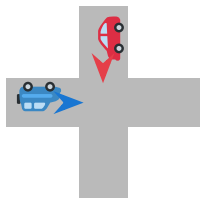
既存研究 完備情報では、**相関均衡**は最適値の $1/2$ 近似 ($1/2$ 倍以上) [Vetta'02]

本研究 不完備情報では、**相関均衡の概念が複数あり、近似保証が異なる**

- 仲介者が真のタイプを知らない（コミュニケーション均衡） $\rightsquigarrow$ PoA は $1/2$ 近似
- 仲介者が真のタイプを知っている（ベイジアン解） $\rightsquigarrow$ $\text{PoA} < 1/2$ になりうる

1. 導入：相関均衡
2. 既存研究：劣モジュラ社会厚生をもつゲーム（整合的効用ゲーム）
3. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム
4. 証明技法：戦略表現性ギャップ

交差点に進入する2台の車🚗と🚗がそれぞれ進むか停まるか決める



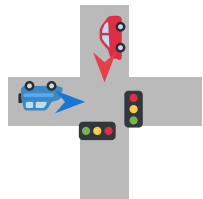
		🚗	
		進	停
🚗	進	0 0	4 3
	停	3 4	1 1

ナッシュ均衡

誰も逸脱しても期待利得が
改善しない安定した状態

- (進, 停)
- (停, 進)
- それぞれ独立に確率 $1/2$ ずつ

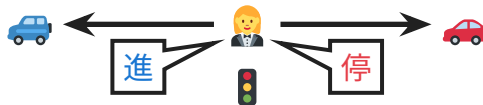
仲介者（交通信号など）によってプレイヤーたちの行動が任意に相関



			
		進	停
	進	0 0	4 3
	停	3 4	1 1

相関均衡

仲介者  が各プレイヤーに行動推薦

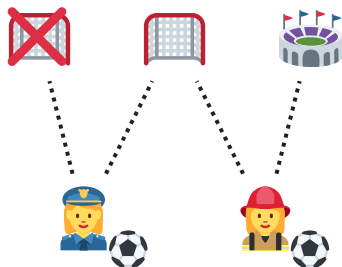


cf. ナッシュ均衡では各自独立に行動選択

ナッシュ均衡を含む無限個存在

例) (進, 停) と (停, 進) を確率 1/2 ずつ

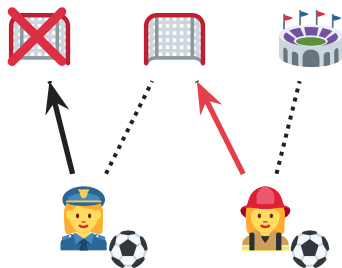
1. 導入：相関均衡
2. 既存研究：劣モジュラ社会厚生をもつゲーム（整合的効用ゲーム）
3. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム
4. 証明技法：戦略表現性ギャップ



2 人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1

そうでなければ利得 0

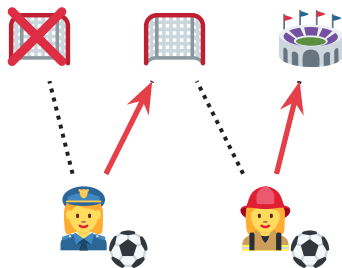


2 人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1

そうでなければ利得 0

最悪の相関均衡での社会厚生 = 1

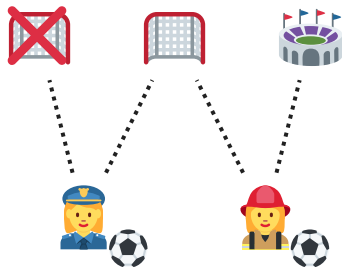


2人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1

そうでなければ利得 0

最適な社会厚生 = 2



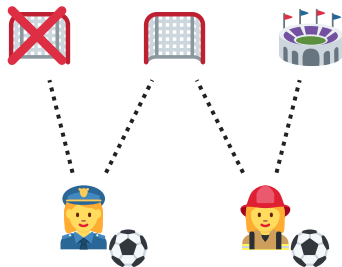
2人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1

そうでなければ利得 0

$$\text{PoA} := \frac{\text{最悪の相関均衡での社会厚生}}{\text{最適な社会厚生}} = \frac{1}{2}$$

(price of anarchy)



2人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1
そうでなければ利得 0

$$\text{PoA} := \frac{\text{最悪の相関均衡での社会厚生}}{\text{最適な社会厚生}} = \frac{1}{2}$$

(price of anarchy)

定理 (informal) [Vetta 2002, Roughgarden'15]

社会厚生関数が劣モジュラ（整合的効用ゲーム）のとき相関均衡の $\text{PoA} \geq 0.5$

社会厚生（全員の利得の和など）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

社会厚生（全員の利得の和など）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

$$f(\{\text{📖} \text{👮}\}) - f(\{\})$$

まだ誰も参加していないときの
社会厚生の増分

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

社会厚生（全員の利得の和など）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

$$f(\{\text{📖}, \text{👮}\}) - f(\{\})$$

まだ誰も参加していないときの
社会厚生の増分

$$f(\{\text{📖}, \text{👮}, \text{📖}, \text{👷}\}) - f(\{\text{📖}, \text{👷}\})$$

他の人が既に参加しているときの
社会厚生の増分

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

社会厚生（全員の利得の和など）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

$$f(\{\text{📖}, \text{👮}\}) - f(\{\})$$

まだ誰も参加していないときの
社会厚生の増分

$$\geq$$

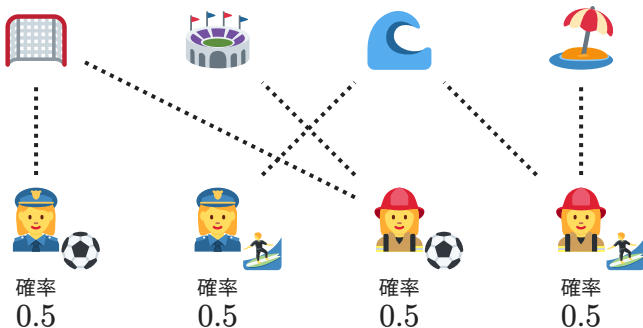
$$f(\{\text{📖}, \text{👮}, \text{👷}\}) - f(\{\text{📖}, \text{👷}\})$$

他の人が既に参加しているときの
社会厚生の増分

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

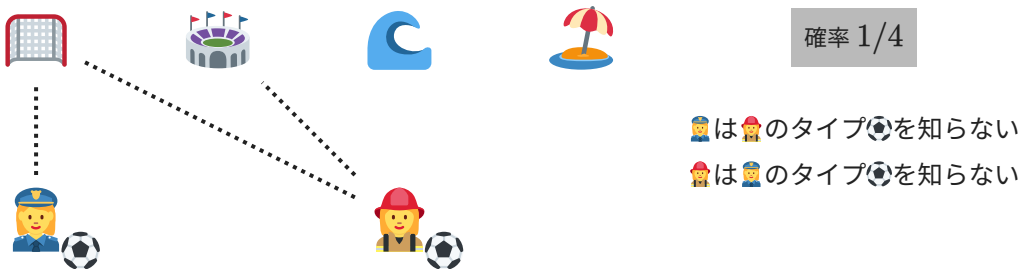
1. 導入：相関均衡
2. 既存研究：劣モジュラ社会厚生をもつゲーム（整合的効用ゲーム）
- 3. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム**
4. 証明技法：戦略表現性ギャップ

既知の分布に従って確率的にタイプが決まり、それに応じて行動集合が変化

**Q**

$\text{PoA} \geq 0.5$ はベイジアンゲームの相関均衡にも拡張できるか？

既知の分布に従って確率的にタイプが決まり、それに応じて行動集合が変化



Q

$\text{PoA} \geq 0.5$ はベイジアンゲームの相関均衡にも拡張できるか？

既知の分布に従って確率的にタイプが決まり、それに応じて行動集合が変化



確率 $1/4$



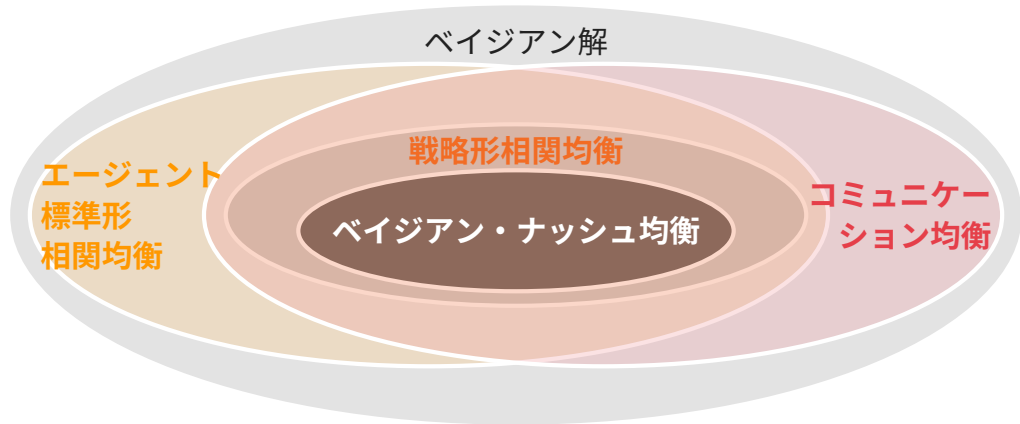
👮 は 🧑‍🚒 のタイプ 🏄 を知らない

🧑‍🚒 は 👮 のタイプ ⚽ を知らない

Q

$\text{PoA} \geq 0.5$ はベイジアンゲームの相関均衡にも拡張できるか？

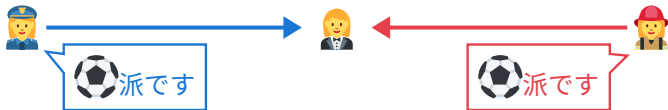
ベイズ相関均衡（ベイジアンゲームにおける相関均衡）には
複数の自然な定義があり、それぞれ異なる情報交換の仕組みをもつ



仲介者  とプレイヤーたちの双方向の情報交換で実現

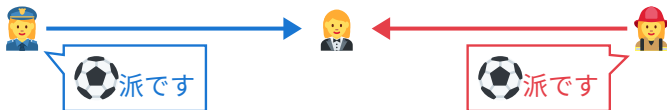
仲介者  とプレイヤーたちの双方向の情報交換で実現

① 各プレイヤーは仲介者  に private channel でタイプを報告

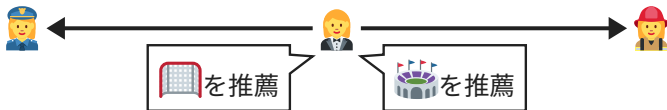


仲介者  とプレイヤーたちの双方向の情報交換で実現

- 1 各プレイヤーは仲介者  に private channel でタイプを報告



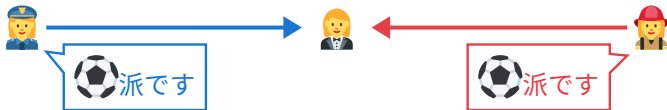
- 2 仲介者  は private channel で各プレイヤーに行動を推薦



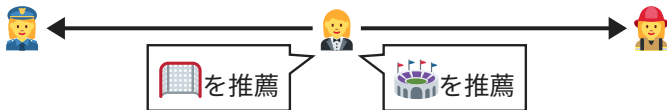
仲介者  とプレイヤーたちの双方向の情報交換で実現

- 1 各プレイヤーは仲介者  に private channel でタイプを報告

← 嘘のタイプを報告するインセンティブがない



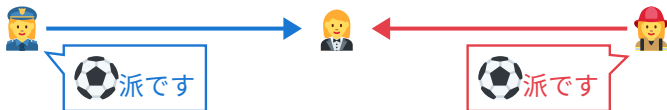
- 2 仲介者  は private channel で各プレイヤーに行動を推薦



仲介者  とプレイヤーたちの双方向の情報交換で実現

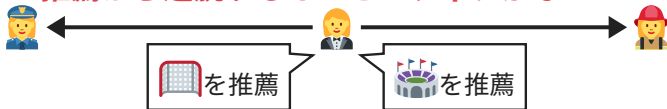
- ① 各プレイヤーは仲介者  に private channel でタイプを報告

← 嘘のタイプを報告するインセンティブがない



- ② 仲介者  は private channel で各プレイヤーに行動を推薦

← 推薦から逸脱するインセンティブがない

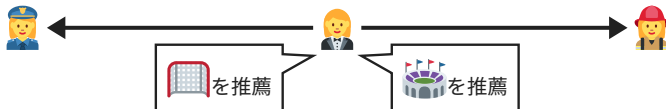


- 1 仲介者  は各プレイヤーの**真の**タイプを観測   
 

(cf. コミュニケーション均衡では**正直に申告するインセンティブ**が必要)

- 2 仲介者  は各プレイヤーに private channel で行動を推薦

← **推薦から逸脱するインセンティブがない**



$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

$\Theta_{\text{👮}} = \Theta_{\text{👷}} = \{\text{⚽}, \text{🏂}\}$

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_{\text{👮}} = \Theta_{\text{👷}} = \{\text{⚽}, \text{🏂}\}$

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A_{\text{👮}}^{\text{⚽}} = \{\text{🏠}, \text{🏟️}\}$
 $A_{\text{👷}}^{\text{🏂}} = \{\text{🏠}, \text{🏟️}\}$

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_{\text{👮}} = \Theta_{\text{👷}} = \{\text{⚽}, \text{🏂}\}$

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A_{\text{👮}}^{\text{⚽}} = \{\text{🏠}, \text{🏟️}\}$

$\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$ タイプの組全体の集合

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_{\text{👮}} = \Theta_{\text{👷}} = \{\text{⚽}, \text{🏂}\}$

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A_{\text{👮}}^{\text{⚽}} = \{\text{🏠}, \text{🏟️}\}$

$\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$ タイプの組全体の集合

$\rho \in \Delta(\Theta)$ タイプの組の事前分布

$\rho(\text{⚽}, \text{⚽}) = 1/4$

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_{\text{👮}} = \Theta_{\text{👷}} = \{\text{⚽}, \text{🏃}\}$

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限) $A^{\text{⚽}} = \{\text{🏠}, \text{🏟️}\}$

$\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$ タイプの組全体の集合

$\rho \in \Delta(\Theta)$ タイプの組の事前分布

$\rho(\text{⚽}, \text{⚽}) = 1/4$

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 各プレイヤー $i \in N$ の効用関数

ただし $A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は実現しうる行動の組全体の集合

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 各 $i \in N$ の効用関数 ($A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は行動の組全体)

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i}$ 全プレイヤーの行動全体)

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 各 $i \in N$ の効用関数 ($A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は行動の組全体)

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i}$ 全プレイヤーの行動全体)

定義 (ベイジアン整合的効用ゲーム) [Fujii'25b]

- $\sum_{i \in N} v_i(a) \leq f(\{a_1, \dots, a_n\}) \quad (\forall a \in A) \quad (\text{総効用条件})$
- $v_i(a) \geq f(\{a_1, \dots, a_n\}) - f(\{a_j \mid j \in N \setminus \{i\}\}) \quad (\forall i \in N, a \in A)$
(限界貢献条件)

両方成り立つ場合に**ベイジアン整合的効用ゲーム**,
さらに限界貢献条件が等号で成り立つとき**ベイジアン基本的効用ゲーム**と呼ぶ

均衡の集合 $\Pi \subseteq \prod_{\theta \in \Theta} \Delta(A^\theta)$ に対して PoA と Price of Stability (PoS) は

最悪の均衡による
社会厚生の値

$$\text{PoA}_\Pi \triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]}$$

社会厚生の最大値

$$A^\theta \triangleq \prod_{i \in N} A_i^{\theta_i}$$

記法の濫用により

$$f(a) \triangleq f(\{a_1, \dots, a_n\}) \text{ と表記}$$

完備情報との違い

最適な行動 a_i^* が他プレイヤーのタイプ θ_{-i} に依存

均衡の集合 $\Pi \subseteq \prod_{\theta \in \Theta} \Delta(A^\theta)$ に対して PoA と Price of Stability (PoS) は

最悪の均衡による
社会厚生

$$\text{PoA}_\Pi \triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]}$$

社会厚生の最大値

最良の均衡による
社会厚生

$$\text{PoS}_\Pi \triangleq \frac{\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]}$$

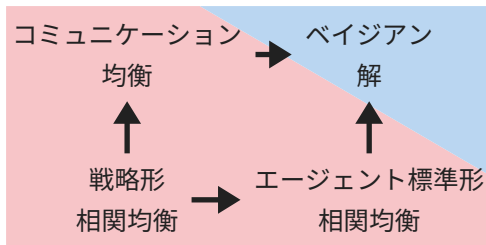
社会厚生の最大値

完備情報との違い

最適な行動 a_i^* が他プレイヤーのタイプ θ_{-i} に依存

PoA の上下界

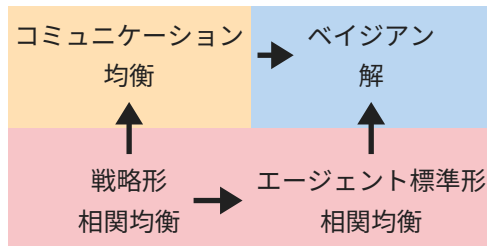
$$\inf \text{PoA} \in \left[\frac{1-1/e}{2}, 0.441 \right]$$



$$\inf \text{PoA} = 0.5$$

PoS の上下界

$$\inf \text{PoS} \in [1 - 1/e, 0.8] \quad \inf \text{PoS} = 1$$



$$\inf \text{PoS} = 1 - 1/e$$

PoS 結果はより強い条件 (basic utility) 下

※ 上記の結果はタイプ事前分布 ρ のプレイヤーごとの独立性を仮定

1. 導入：相関均衡
2. 既存研究：劣モジュラ社会厚生をもつゲーム（整合的効用ゲーム）
3. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム
- 4. 証明技法：戦略表現性ギャップ**

最悪の均衡による

社会厚生の値

$$\text{PoA}_{\Pi} \triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^{\theta}} f(a^*) \right]}$$

社会厚生の最大値

社会厚生不值

$$\text{PoA}_{\Pi}$$

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]$$

最適な戦略の組による

社会厚生不值

社会厚生 of 最大値

$$= \underbrace{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}_{\text{左端值}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a \in A^\theta} f(a) \right]}_{\text{右端值}}$$

完備情報の
場合に帰着

SR gap

$$\begin{aligned}
 \text{PoA}_{\Pi} &\triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^{\theta}} f(a^*) \right]} \\
 &= \underbrace{\frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}_{\text{完備情報の場合に帰着}} \cdot \underbrace{\frac{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a \in A^{\theta}} f(a) \right]}}_{\text{SR gap}}
 \end{aligned}$$

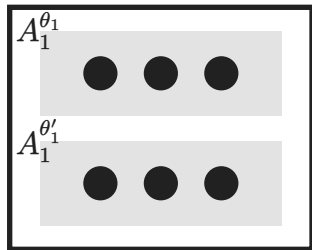
$S_i = \prod_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i}$ 各 $i \in N$ の戦略全体の集合

$s_i \in S_i$ はタイプ θ_i ごとに行動 $s_i(\theta_i)$ を決定

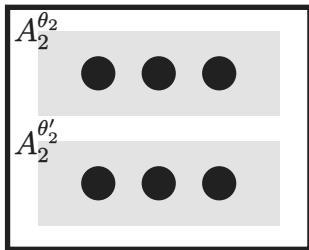
$S \triangleq \prod_{i \in N} S_i, \quad s(\theta) \triangleq (s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n))$

最適な戦略の組による
社会厚生値

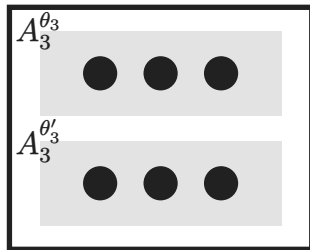
プレイヤー 1



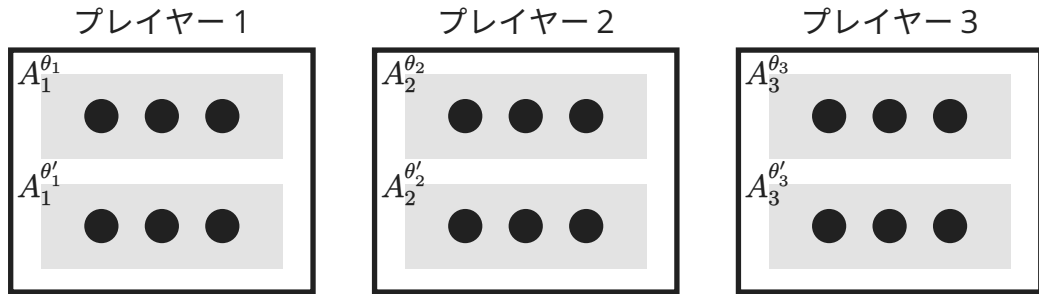
プレイヤー 2



プレイヤー 3

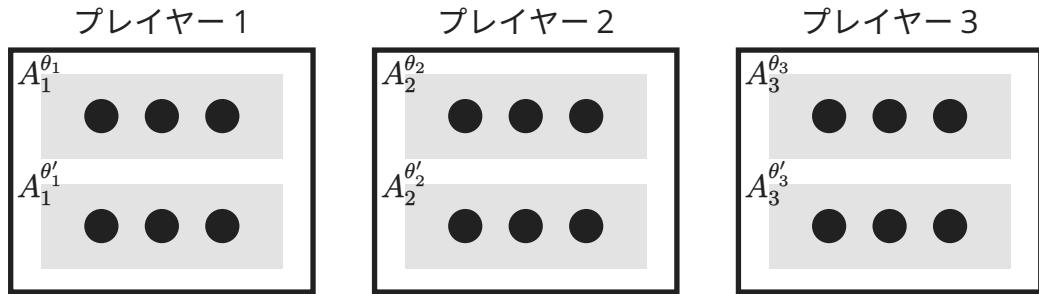


プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定



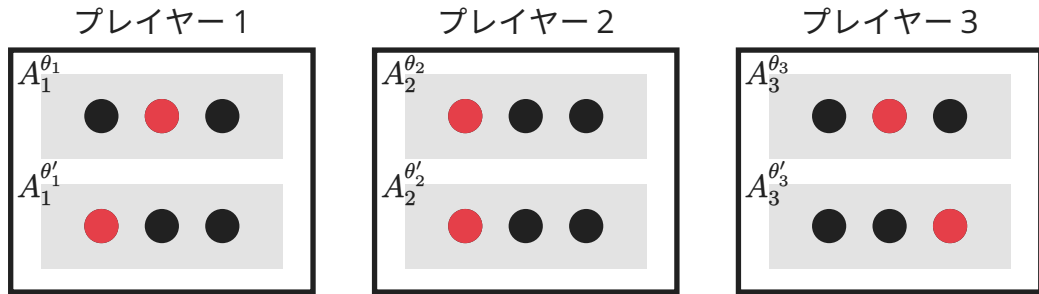
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$



プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

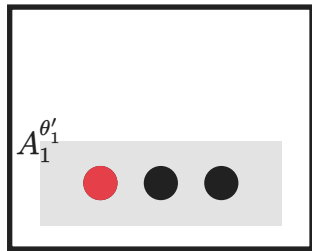
$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$



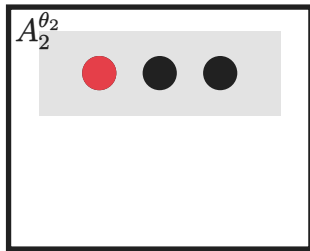
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

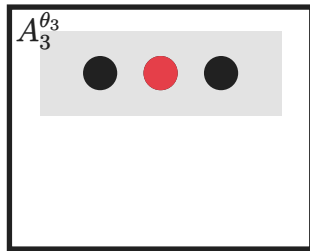
プレイヤー 1



プレイヤー 2

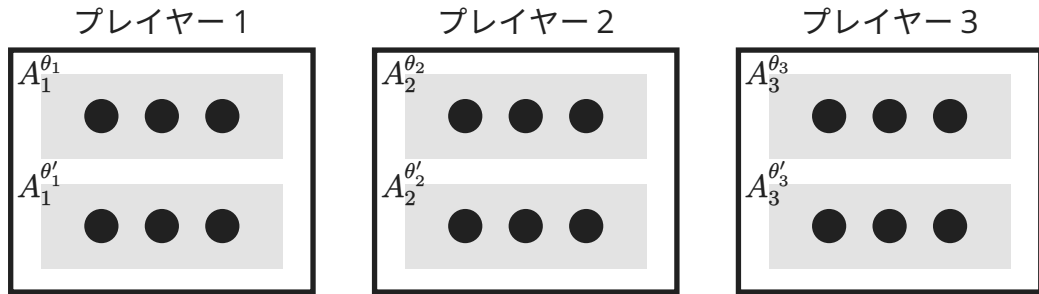


プレイヤー 3



プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

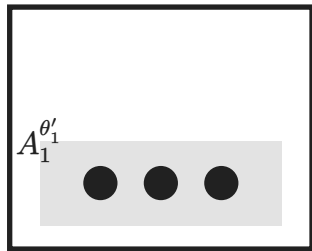
$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$



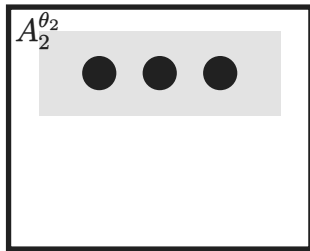
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

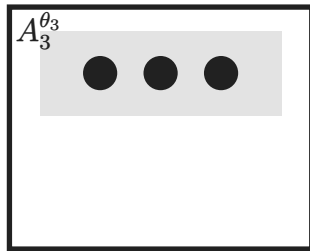
プレイヤー 1



プレイヤー 2



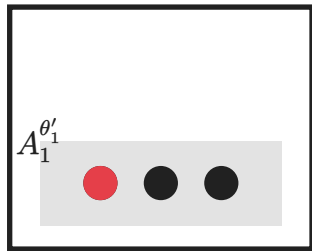
プレイヤー 3



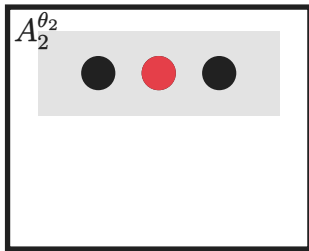
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

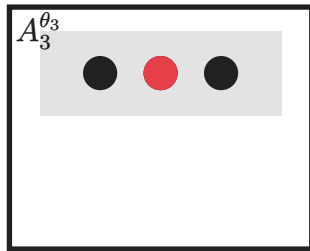
プレイヤー 1



プレイヤー 2



プレイヤー 3



プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

Q 非負単調劣モジュラ関数における SR gap の最小値は？

$$\text{SRgap}_{f,\rho} = \frac{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a \in A^\theta} f(a) \right]}$$

- 事前分布 ρ がプレイヤーごとに**独立**な場合

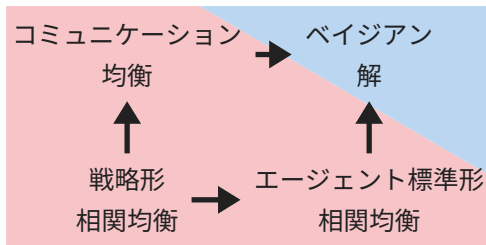
$$\inf_{f, \rho: \text{独立}} \text{SRgap}_{f,\rho} = 1 - 1/e \quad \leftarrow \text{相関ギャップ} + \text{弱負回帰 [Qiu-Singla'22]}$$

- 事前分布 ρ は**相関してもよい**場合（任意の分布）

$$\inf_{f, \rho} \text{SRgap}_{f,\rho} = \Theta(1/\sqrt{n}) \quad \leftarrow \text{多重線形拡張} + \text{要素を大小に分けて解析}$$

PoA の上下界

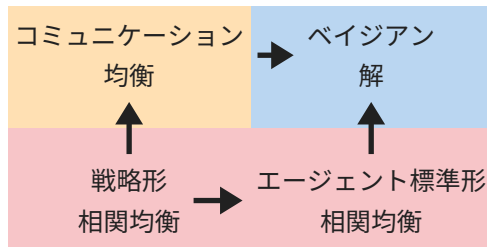
$$\inf \text{PoA} \in \left[\frac{1-1/e}{2}, 0.441 \right]$$



$$\inf \text{PoA} = 0.5$$

PoS の上下界

$$\inf \text{PoS} \in [1 - 1/e, 0.8] \quad \inf \text{PoS} = 1$$



$$\inf \text{PoS} = 1 - 1/e$$

PoS 結果はより強い条件 (basic utility) 下

※ 上記の結果はタイプ事前分布 ρ のプレイヤーごとの独立性を仮定

- Shipra Agrawal, Yichuan Ding, Amin Saberi, and Yinyu Ye. 2012. Price of correlations in stochastic optimization. *Operations Research* 60(1), 150–162.
- Robert J. Aumann. 1974. Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics* 1(1), 67–96.
- Françoise Forges. 1986. An approach to communication equilibria. *Econometrica* 54(6), 1375–1385.
- Françoise Forges. 1993. Five legitimate definitions of correlated equilibrium in games with incomplete information. *Theory and Decision* 35, 277–310.
- Kaito Fujii. 2025b. The power of mediators: Price of anarchy and stability in Bayesian games with submodular social welfare. In *EC 2025*, 251. Full version: arXiv:2506.02655.
- Roger B. Myerson. 1982. Optimal coordination mechanisms in generalized principal–agent problems. *Journal of Mathematical Economics* 10(1), 67–81.
- Frederick Qiu and Sahil Singla. 2022. Submodular dominance and applications. In *APPROX/RANDOM 2022*, LIPIcs 245, 44:1–44:21.
- Tim Roughgarden. 2015. Intrinsic robustness of the price of anarchy. *Journal of the ACM* 62(5), Article 32, 32:1–32:42.

- Avrim Blum and Yishay Mansour. 2007. From external to internal regret. *Journal of Machine Learning Research* 8, 1307–1324.
- Xi Chen, Xiaotie Deng, and Shang-Hua Teng. 2009. Settling the complexity of computing two-player Nash equilibria. *Journal of the ACM* 56(3), Article 14, 14:1–14:57.
- Dean P. Foster and Rakesh V. Vohra. 1997. Calibrated learning and correlated equilibrium. *Games and Economic Behavior* 21(1–2), 40–55.
- Kaito Fujii. 2025a. Bayes correlated equilibria, no-regret dynamics in Bayesian games, and the price of anarchy. In *COLT 2025*, PMLR 291, 2190–2191.
- John C. Harsanyi. 1967–1968. Games with incomplete information played by “Bayesian” players, Parts I–III. *Management Science* 14(3), 159–182; 14(5), 320–334; 14(7), 486–502.
- Sergiu Hart and Andreu Mas-Colell. 2000. A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium. *Econometrica* 68(5), 1127–1150.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

A_i プレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 行動の組 (action profile) 全体の集合

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ プレイヤー $i \in N$ の効用関数

$N = \{\text{🚗}, \text{🚙}\}$

$A_i = \{\text{進}, \text{停}\}$

$v_{\text{🚗}}(\text{進}, \text{停}) = 4$

定義

行動の組の分布 $\pi \in \Delta(A)$ が相関均衡

$a_{-i} = (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ i 以外の行動の組

$\triangleq$ 任意のプレイヤー $i \in N$ と逸脱 $\phi: A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(\phi(a_i), a_{-i})] \leq \mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(a)] \quad (\text{逸脱しても期待利得が改善しない})$$

※ この定義において π を直積分布に制限すれば、ナッシュ均衡の定義に一致

定義

行動の組の分布 $\pi \in \Delta(A)$ が相関均衡

$\Leftrightarrow$ 任意のプレイヤー $i \in N$ と逸脱 $\phi: A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(\phi(a_i), a_{-i})] \leq \mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(a)] \quad (\text{逸脱しても期待利得が改善しない})$$

	進	停
進	0, 0	4, 3
停	3, 4	1, 1

前頁の相関均衡の例は以下のような分布 $\pi \in \Delta(A)$

$$\pi(\text{進}, \text{停}) = 1/2, \quad \pi(\text{停}, \text{進}) = 1/2$$

どのような ϕ を使っても期待利得は非増加

例) $\phi(\text{進}) = \text{停}, \phi(\text{停}) = \text{停}$ を使うと 3.5 から 2 へ減少

メリット 1 仲介者を用いた自然な解釈（前述）

メリット 2 学習ダイナミクスによって効率的に計算可能

- ゲームの繰り返しでプレイヤーたちがリグレット最小化すると自然に到達
- n 人ゲームの相関均衡を n の多項式時間で計算可能
(cf. ナッシュ均衡の計算は 2 人でも PPAD 困難 [Chen-Deng-Teng'09])

メリット 3 さまざまなゲームにおける社会厚生¹の保証（今日の話題）

- 都市交通、オークション、資源配分などの応用上重要なゲームで
相関均衡の社会厚生（社会的な望ましさ）は近似的に最適 [Roughgarden'15]

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 各プレイヤー $i \in N$ の効用関数 ($A = \prod_{i \in N} A_i$ は行動の組全体)

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} A_i$ 全プレイヤーの行動全体)

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 各プレイヤー $i \in N$ の効用関数 ($A = \prod_{i \in N} A_i$ は行動の組全体)

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} A_i$ 全プレイヤーの行動全体)

定義（整合的効用ゲーム） [Vetta'02]

- $\sum_{i \in N} v_i(a) \leq f(\{a_1, \dots, a_n\}) \quad (\forall a \in A) \quad (\text{総効用条件})$
- $v_i(a) \geq f(\{a_1, \dots, a_n\}) - f(\{a_j \mid j \in N \setminus \{i\}\}) \quad (\forall i \in N, a \in A)$
(限界貢献条件)

これら両方を満たすゲームを**整合的効用ゲーム** (valid utility game) と呼ぶ

さらに限界貢献条件が等号で成り立つとき**基本的効用ゲーム** (basic utility game) と呼ぶ

定理 [Vetta 2002, Roughgarden'15]

整合的効用ゲームにおける相関均衡の $\text{PoA} \geq 0.5$

証明

任意の相関均衡 $\pi \in \Delta(A)$ と最適解 $a^* \in \arg\max_{a \in A} f(a)$ について

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a \sim \pi} [f(a)] &\geq \mathbb{E}_{a \sim \pi} \left[\sum_{i \in N} v_i(a) \right] \geq \mathbb{E}_{a \sim \pi} \left[\sum_{i \in N} v_i(a_i^*, a_{-i}) \right] \\ &\geq \mathbb{E}_{a \sim \pi} \left[\sum_{i \in N} \{f(a_i^*, a_{-i}) - f(a_{-i})\} \right] \geq f(a^*) - \mathbb{E}_{a \sim \pi} [f(a)] \end{aligned}$$

記法の濫用により

$$f(a) \triangleq f(\{a_1, \dots, a_n\})$$

$$f(a_{-i}) \triangleq f(\{a_j \mid j \in N \setminus \{i\}\})$$

と表記

不等号はそれぞれ総効用条件、相関均衡の定義、限界貢献条件、劣モジュラ性と単調性より

ゆえに $2 \mathbb{E}_{a \sim \pi} [f(a)] \geq f(a^*)$, すなわち $\text{PoA} \geq 1/2$

□

5. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡

6. 証明のより詳細な説明

7. 本研究のその他の結果

休日一緒に出かけたい  と  がそれぞれ行き先を決める

 は海  に行きたいが、 は山  に行きたい

			
		海 	山 
	海 	4 3	1 1
	山 	0 0	3 4

行きたい場所 → 1 点

同じ場所 → それぞれ 3 点ずつ

ベイジアンゲーム (不完備情報ゲーム + 共有事前分布) [Harsanyi'67] 10/ 28

各プレイヤーのタイプ (好み) が共有された事前分布に従って決まるゲーム

 と  はそれぞれ確率 1/2 で海  派、確率 1/2 で山  派

(互いに相手のタイプは知らないが分布は知っている)

		確率 1/4   派	
		海 	山 
	海 	4 4	1 0
	山 	0 1	3 3

		確率 1/4   派	
		海 	山 
	海 	4 3	1 1
	山 	0 0	3 4

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

A_i プレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A_1 = A_2 = \{\text{👮}, \text{👷}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_1 = \Theta_2 = \{\text{👮派}, \text{👷派}\}$

$A = \prod_{i \in N} A_i$ 行動の組全体の集合, $\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$ タイプの組全体の集合

$\rho \in \Delta(\Theta)$ タイプの組の事前分布 (共有知識)

$\rho(\text{👮派}, \text{👮派}) = 1/4$

$v_i: \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ プレイヤー $i \in N$ の効用関数

$v_1(\text{👮派}, \text{👮派}; \text{👮}, \text{👷}) = 1$

1 タイプの組 $\theta \sim \rho$ が生成され、各 $i \in N$ が自分のタイプ θ_i を知る

2 各 $i \in N$ は他人のタイプ θ_{-i} を知らないまま行動 $a_i \in A_i$ を選択

通常の設定

A_i プレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$v_i: \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ プレイヤー $i \in N$ の効用関数

(θ_i, a_i) を一つの行動とみなす $\downarrow \uparrow A_i := \bigcup_{\theta_i} A_i^{\theta_i}$ とし, $\forall \theta'_i \neq \theta_i$ の行動を無視

タイプ依存行動集合の設定

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 各プレイヤー $i \in N$ の効用関数

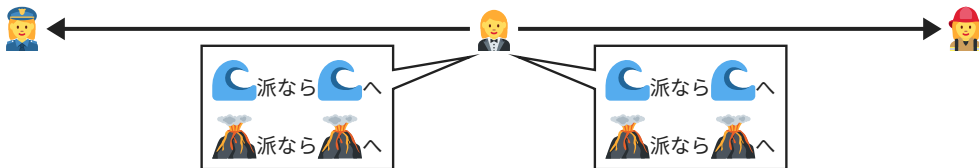
ただし $A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は実現しうる行動の組全体の集合

ベイジアンゲームの戦略形

タイプから行動への写像 $s_i: \Theta_i \rightarrow A_i$ (戦略と呼ぶ) を一つの行動と解釈
各プレイヤーは戦略全体 $S_i := A_i^{\Theta_i}$ から戦略を一つ選択

仲介者  は各プレイヤーに private channel でタイプごとの行動を推薦

← 推薦から逸脱するインセンティブがない

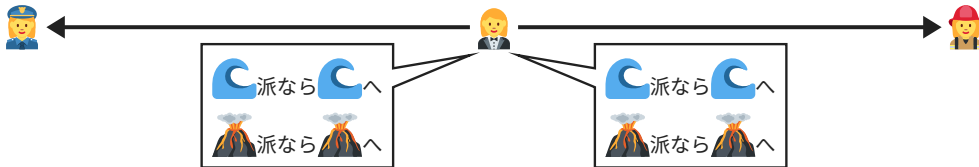


定義

分布 $\sigma \in \Delta(S_1 \times \cdots \times S_n)$ が戦略形相関均衡であるとは,

任意のプレイヤー $i \in N$ と任意の戦略の逸脱 $\phi_{SF}: S_i \rightarrow S_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n))] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; \phi_{SF}(s_i)(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}))] \right]$$



ベイジアンゲームのエージェント標準形

各プレイヤーをタイプごとに異なる仮想的なプレイヤーとみなす
実現したタイプに対応する仮想的プレイヤーだけがゲームに参加する

例) 仮想的プレイヤー 4 人 (🏠, 🌊), (🏠, 🏔️), (🏡, 🌊), (🏡, 🏔️) のうち 2 人がゲームに参加

戦略形相関均衡との違い：

各プレイヤーは自分のタイプ以外への推薦は観測しない

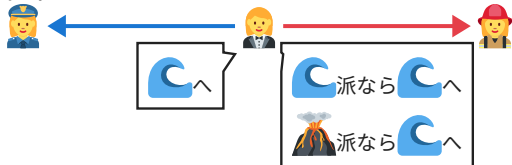
※ 仲介者 🧑💼 によって実現する自然なシナリオは知られていない

定義

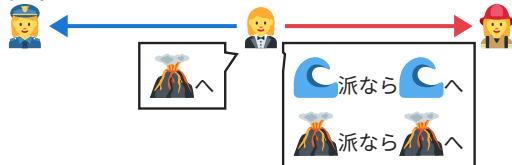
分布 $\sigma \in \Delta(S_1 \times \cdots \times S_n)$ が**エージェント標準形相関均衡**であるとは、
任意のプレイヤー $i \in N$ と任意のタイプごとの逸脱 $\phi: \Theta_i \times A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n))] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; \phi(\theta_i, s_i(\theta_i)), s_{-i}(\theta_{-i}))] \right]$$

確率 0.5 で



確率 0.5 で



この分布では、 と  ( 派) は常に同じ場所を推薦される

この分布は SFCE ではない： ( 派) は常に を推薦されるが、 ( 派) への推薦を観測すれば、 と同じ行動へ逸脱できる

この分布は ANFCE： ( 派) は自分への推薦（常に）だけを観測するため、逸脱しても得しない

定義

分布 $\pi \in \Delta(A)^\Theta$ がベイズアン解であるとは,

任意のプレイヤー $i \in N$ と任意の推薦後の逸脱 $\phi: \Theta_i \times A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [v_i(\theta; a)] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [v_i(\theta; \phi(\theta_i, a_i), a_{-i})] \right]$$

分布 $\pi \in \Delta(A)^\Theta$ が**戦略表現性**をもつ (strategy-representable)

$\triangleq$ ある戦略の組の分布 $\sigma \in \Delta(S_1 \times \cdots \times S_n)$ が存在して

$$\Pr_{s \sim \sigma} (s_1(\theta_1) = a_1, \dots, s_n(\theta_n) = a_n) = \pi(\theta; a) \quad (\forall \theta \in \Theta, a \in A)$$

戦略の組の分布としては表現できない



 が  派なら
 は  を推薦

 が  派なら
 は  を推薦

定義

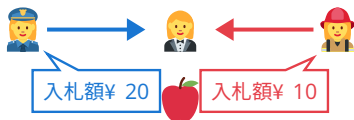
分布 $\pi \in \Delta(A)^\Theta$ が**コミュニケーション均衡**であるとは、
任意のプレイヤー $i \in N$ ，嘘のタイプ報告 $\psi: \Theta_i \rightarrow \Theta_i$ ，
推薦された行動からの逸脱 $\phi: \Theta_i \times A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [v_i(\theta; a)] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\psi(\theta_i), \theta_{-i})} [v_i(\theta; \phi(\theta_i, a_i), a_{-i})] \right]$$

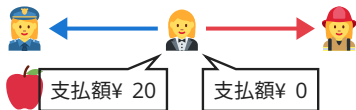
- 1 プレイヤー i が真のタイプ θ_i に基づきタイプ $\psi(\theta_i)$ を報告
- 2 報告されたタイプの組に基づき仲介者が $a \sim \pi(\psi(\theta_i), \theta_{-i})$ を推薦
- 3 プレイヤー i が推薦された行動 a_i に基づき行動 $\phi(\theta_i, a_i)$ に逸脱

メカニズムデザイン

- 1 各プレイヤーがタイプを報告
← 嘘をついても得しない



- 2 女性が結果を決定
← この決定は逸脱不可

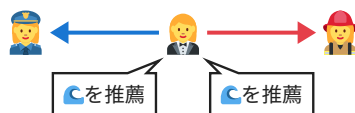


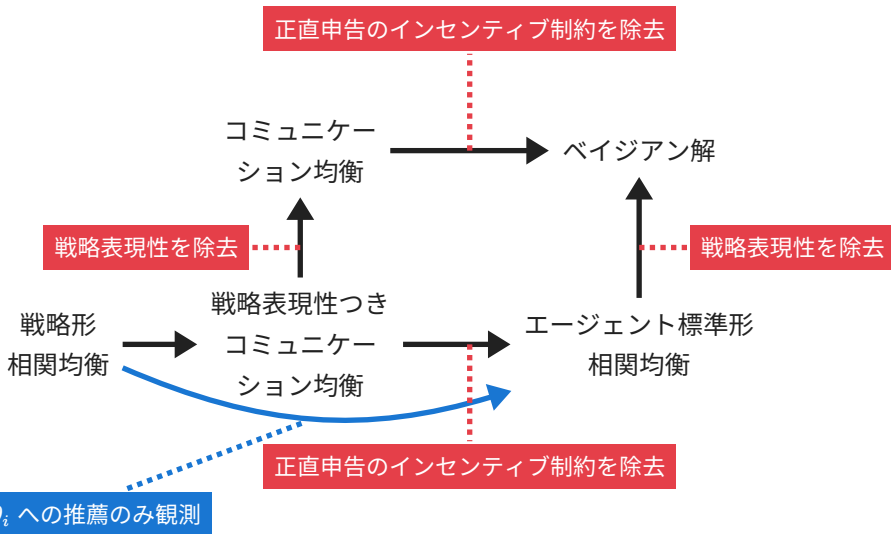
相関均衡

- 1 タイプなし（完備情報）



- 2 女性が行動を推薦
← 逸脱しても得しない





5. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡

6. 証明のより詳細な説明

7. 本研究のその他の結果

定理

ρ が独立なら $\text{SRgap} \geq 1 - 1/e$ であり，この下界は tight

下界

相関ギャップ + 弱負回帰（負の相関の一種）

上界



最適な社会厚生: n

高確率で完全マッチングが存在

最適な戦略の組: $\approx (1 - 1/e)n$

各資源が選ばれる期待確率を上から抑えられる

定理

$\text{SRgap} = \Omega(1/\sqrt{n})$ であり，この下界のオーダーは tight

下界

複雑

上界

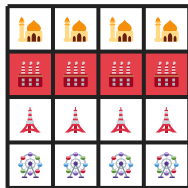
$$\Theta_1 = \dots = \Theta_n = [n]^k$$

$$j \sim [k] \text{ かつ } \ell_1, \dots, \ell_k \sim [n]$$

タイプ $\{(\ell_1, \dots, \ell_{j-1}, t, \ell_{j+1}, \dots, \ell_k) \mid t \in [n]\}$ を n 人のプレイヤーにランダムに割り当てる



1 番目の行動



2 番目の行動

$n = 4, k = 2$ の場合

$E = [k] \times [n]$ 資源の集合 行動の数は k ずつ
タイプ ℓ の h 番目の行動は $(h, \ell_h) \in E$ を選ぶこと

$k = \sqrt{n}$ とすると

最適な社会厚生: n

最適な戦略の組: $\leq k + n/k = 2\sqrt{n}$

5. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡

6. 証明のより詳細な説明

7. 本研究のその他の結果

命題

ρ が独立なら $\text{PoA}_{\text{Com.Eq.}} \geq 0.5$ (戦略表現性ギャップを用いた保証を改善)

証明の流れは完備情報 (non-Bayesian) の場合と同じ

プレイヤー $i \in N$ が $\theta' \sim \rho$ を独自に生成しタイプ θ'_i を報告する逸脱を考える
(コミュニケーション均衡の条件)

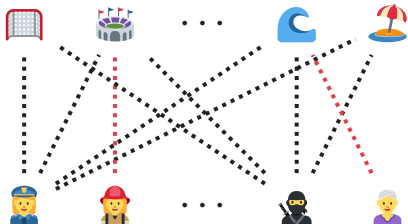
ρ の独立性を用いて、不等式中の真のタイプ θ_i と嘘のタイプ θ'_i を入れ替え

注意

同じ結果がエージェント標準形相関均衡にも成り立つ

命題

独立な ρ をもつ例で $\text{PoA}_{\text{BS}} \leq \frac{1 - 1/\sqrt{e}}{3/2 - 1/\sqrt{e}} \approx 0.4403$



奇数プレイヤー：全ての資源に接続

偶数プレイヤー：ランダムに一つの資源に接続

奇数プレイヤーが偶数プレイヤーに優先

悪いベイジアン解:

プレイヤー $(2k - 1)$ にプレイヤー $2k$ の行動を推薦

最適: $\approx \underbrace{n/2}_{\text{奇数}} + \underbrace{(1 - 1/\sqrt{e})n}_{\text{偶数}}, \quad \text{ベイジアン解: } \approx (1 - 1/\sqrt{e})n$