

局所探索の近似保証と均衡の社会的最適性

藤井海斗 (京都大学)

マトロイド理論と暗号理論の交差点 2026/8/4 @ 九州大学

1. 局所探索とその近似保証
2. 局所解と均衡の対応
3. 相関均衡の近似的最適性
4. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡
5. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム

すべての部分集合に実数値を割り当てる関数



$$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$$

E は要素全体の集合（台集合）

$$m \triangleq |E|$$

$$E = \left\{ \text{🍝}, \text{🍡}, \text{🥦}, \text{🍕}, \text{🍱}, \text{🍔}, \text{🍜}, \text{🍫}, \text{🍔}, \text{🍩}, \text{🍌}, \text{🍞}, \text{🥐}, \text{🍙} \right\}$$

すべての部分集合に実数値を割り当てる関数

$$f(\{\text{🥦, 🍷, 🍌}\}) = 50$$



$$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$$

E は要素全体の集合 (台集合)

$$m \triangleq |E|$$

$$E = \{\text{🍜, 🍡, 🥦, 🍕, 🍱, 🍷, 🍫, 🍔, 🍩, 🍌, 🍞, 🌙, 🍡, 🍌, 🍞, 🌙, 🍡}\}$$

すべての部分集合に実数値を割り当てる関数

$$f(\{\text{🍝, 🍷}\}) = 20$$



$$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$$

E は要素全体の集合 (台集合)

$$m \triangleq |E|$$

$$E = \{\text{🍝, 🍷, 🥦, 🍕, 🍱, 🍷, 🍜, 🍫, 🍔, 🍩, 🍌, 🍞, 🌙, 🍙}\}$$

関数値が最大となる組合せを見つける問題

Maximize $f(X)$ 目的関数

subject to $X \in \mathcal{B}$ マトロイド制約 ($\mathcal{B} \subseteq 2^E$ は基族)

※ 関数値オラクル ($f(X)$ の値の計算) と独立性オラクル ($X \in \mathcal{B}$ かどうか)
の呼び出し回数で計算量を測る

素朴なアプローチ

基をすべて調べる

→ 基の数は指数的に多いので天文学的な時間がかかる

問

どのようなアルゴリズムを使えばよい解が求まるか？

初期解

$$f(\{\text{🍫}, \text{🍪}, \text{🥤}\}) = 10$$

$$f(\{\text{🍷}, \text{🍪}, \text{🥤}\}) = 30$$

$$f(\{\text{🍷}, \text{🥗}, \text{🥤}\}) = 40$$

出力

$$f(\{\text{🍷}, \text{🥗}, \text{🥛}\}) = 60$$

関数値を改善する**一要素の交換**がなくなるまで、交換を繰り返す

(毎回 $(1 + \epsilon)$ 倍以上の改善を要求すれば、 ϵ 近似局所解が $1/\epsilon$ に関する多項式時間で求まる)

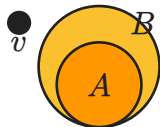
問 f が**どんな条件**を満たせば局所探索がうまくいくか？

答 f が**線形**なら**最適解** (最大重み基)、**単調劣モジュラ**なら**近似解**が求まる

手元にある要素が増えると新しい要素による増分が減る

$$f(v \mid A) \triangleq f(A \cup \{v\}) - f(A)$$

$A \subseteq E$ に対して $v \in E$ を追加したときの増分



$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ が劣モジュラ

$\triangleq A \subseteq B$ を満たす任意の $A, B \subseteq E$ と $v \in E \setminus B$ について

$f(v \mid A) \geq f(v \mid B)$ が成り立つ

$A = \{\text{🍌}\}$, $B = \{\text{🍌}, \text{🎲}\}$, $v = \text{🍷}$ のとき

$$f(\{\text{🍷}, \text{🍌}\}) - f(\{\text{🍌}\}) \geq f(\{\text{🍷}, \text{🍌}, \text{🎲}\}) - f(\{\text{🍌}, \text{🎲}\})$$

要素を追加すると関数値が増える（減らない）

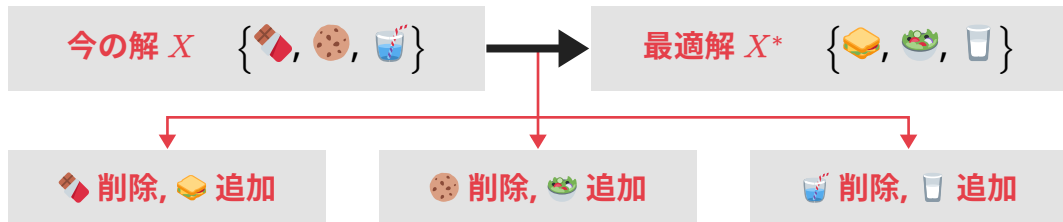
$$f(v \mid A) \triangleq f(A \cup \{v\}) - f(A)$$

$A \subseteq E$ に対して $v \in E$ を追加したときの増分

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ が**単調**

$\triangleq$ 任意の $A \subseteq E$ と $v \in E$ について $f(v \mid A) \geq 0$ が成立

$$A = \{\text{🍌}, \text{📺}\}, v = \text{🍕} \text{ のとき} \quad f(\{\text{🍕}, \text{🍌}, \text{📺}\}) - f(\{\text{🍌}, \text{📺}\}) \geq 0$$



マトロイドの性質より、 $X \setminus X^* = \{x_1, \dots, x_k\}$, $X^* \setminus X = \{x_1^*, \dots, x_k^*\}$ として
 $X - x_i + x_i^* \in \mathcal{B}$ となるようにできる (k は適当な自然数)

局所探索の近似保証において鍵となる補題：

$$f \text{ が非負単調劣モジユラなら } \sum_{i=1}^k \{f(X - x_i + x_i^*) - f(X)\} \geq f(X^*) - 2f(X)$$

前頁の補題

$$\sum_{i=1}^k \{f(X - x_i + x_i^*) - f(X)\} \geq f(X^*) - 2f(X)$$

定理

f が非負単調劣モジュラ、 $\mathcal{B}$ がマトロイド基族のとき

局所探索の出力を X とすると $f(X) \geq \frac{1}{2} \max_{X^* \in \mathcal{B}} f(X^*)$ ($\frac{1}{2}$ 近似と呼ぶ)

証明

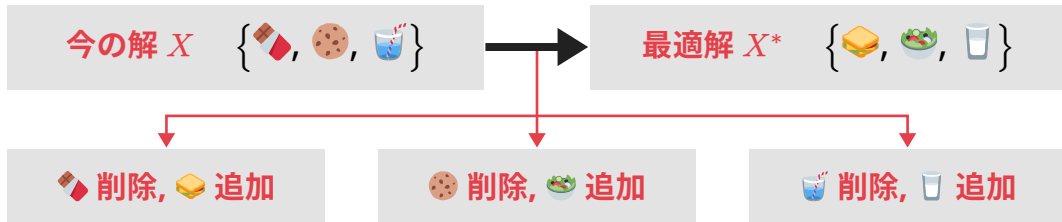
局所探索の停止条件より $f(X - x_i + x_i^*) - f(X) \leq 0$ ($\forall i = 1, \dots, k$)

前頁の補題から $0 \geq \sum_{i=1}^k \{f(X - x_i + x_i^*) - f(X)\} \geq f(X^*) - 2f(X)$

よって $f(X) \geq \frac{1}{2} f(X^*)$



局所探索の近似保証において鍵となる集合関数の性質

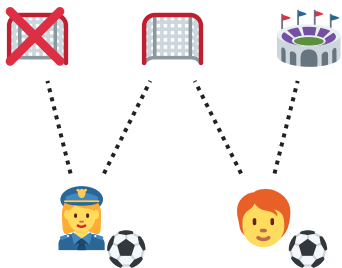


$$f \text{ が } (\alpha, \beta)\text{-localizable} \triangleq \sum_{i=1}^k \{f(X - x_i + x_i^*) - f(X)\} \geq \alpha f(X^*) - \beta f(X)$$

f が (α, β) -localizable なら、局所探索の出力 X は $\frac{\alpha}{\beta}$ 近似

線形関数は $(1, 1)$ -localizable、非負単調劣モジュラ関数は $(1, 2)$ -localizable など

1. 局所探索とその近似保証
- 2. 局所解と均衡の対応**
3. 相関均衡の近似的最適性
4. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡
5. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム



2人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1
そうでなければ利得 0

$N = \{\text{警察官}, \text{ファン}\}$ プレイヤー集合 $A = A_{\text{警察官}} \times A_{\text{ファン}}$

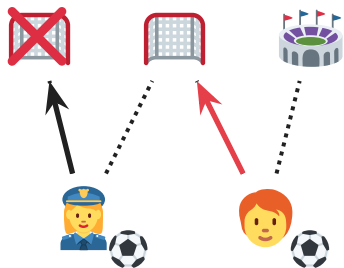
$A_{\text{警察官}} = \{\text{閉鎖}, \text{開放}\}, A_{\text{ファン}} = \{\text{開放}, \text{サッカー}\}$ 各プレイヤーの行動集合

$v_{\text{警察官}}, v_{\text{ファン}} : A \rightarrow \mathbb{R}$ 各プレイヤーの効用関数

定義

$a \in A$ が **純粋ナッシュ均衡** $\Leftrightarrow v_i(a'_i, a_{-i}) \leq v_i(a) \quad (\forall i \in N, \forall a'_i \in A_i)$

プレイヤー $i \in N$ が行動を a_i から a'_i に変えても利得が増えない $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$



2人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1
そうでなければ利得 0

$N = \{\text{警察官}, \text{ファン}\}$ プレイヤー集合 $A = A_{\text{警察官}} \times A_{\text{ファン}}$

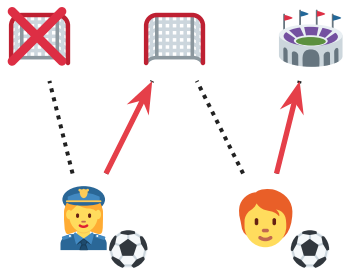
$A_{\text{警察官}} = \{\text{閉鎖}, \text{開放}\}$, $A_{\text{ファン}} = \{\text{開放}, \text{サッカー}\}$ 各プレイヤーの行動集合

$v_{\text{警察官}}, v_{\text{ファン}} : A \rightarrow \mathbb{R}$ 各プレイヤーの効用関数

定義

$a \in A$ が **純粋ナッシュ均衡** $\Leftrightarrow v_i(a'_i, a_{-i}) \leq v_i(a) \quad (\forall i \in N, \forall a'_i \in A_i)$

プレイヤー $i \in N$ が行動を a_i から a'_i に変えても利得が増えない $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$



2人のプレイヤーがそれぞれ行き先を選ぶ

サッカー可能 かつ **相手と違う場所** なら利得 1
そうでなければ利得 0

$N = \{\text{警察官}, \text{ファン}\}$ プレイヤー集合 $A = A_{\text{警察官}} \times A_{\text{ファン}}$

$A_{\text{警察官}} = \{\text{閉鎖}, \text{開放}\}, A_{\text{ファン}} = \{\text{開放}, \text{サッカー}\}$ 各プレイヤーの行動集合

$v_{\text{警察官}}, v_{\text{ファン}} : A \rightarrow \mathbb{R}$ 各プレイヤーの効用関数

定義

$a \in A$ が **純粋ナッシュ均衡** $\Leftrightarrow v_i(a'_i, a_{-i}) \leq v_i(a) \quad (\forall i \in N, \forall a'_i \in A_i)$

プレイヤー $i \in N$ が行動を a_i から a'_i に変えても利得が増えない $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$

一般には純粋ナッシュ均衡は存在するとは限らない（例：じゃんけん）

定義

$(N, (A_i)_{i \in N}, (v_i)_{i \in N})$ がポテンシャルゲーム

利得の改善 = ポテンシャルの改善

$\triangleq$ あるポテンシャル関数 $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して以下が成立

$$v_i(a'_i, a_{-i}) - v_i(a) = \Phi(a'_i, a_{-i}) - \Phi(a) \quad (\forall i \in N, \forall a \in A, \forall a'_i \in A_i)$$

前頁のゲームでは、“全体で選ばれたサッカー場の数” がポテンシャル関数

定理 [Monderer-Shapley'96]

有限ポテンシャルゲームには純粋ナッシュ均衡が存在する

証明

Φ の局所解（どの a_i を交換しても関数値が増えない）は純粋ナッシュ均衡

ポテンシャル関数の局所解と純粋ナッシュ均衡が対応

分割マトロイド

各分割から要素の一つ選ぶ



局所解 $X \in \mathcal{B}$:

一要素の交換で関数値が改善しない

ゲームにおける行動選択

各プレイヤーが行動の一つ選ぶ



純粋ナッシュ均衡 $a \in A$:

一人の逸脱でポテンシャルが改善しない

社会厚生（全体で選ばれたサッカー場の数）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

社会厚生（全体で選ばれたサッカー場の数）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

$$f(\{\text{📅} \text{👮}\}) - f(\{\})$$



まだ誰も参加していないときの
社会厚生を増分

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

社会厚生（全体で選ばれたサッカー場の数）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

$$f(\{\text{サッカー場}, \text{プレイヤー}\}) - f(\{\})$$

まだ誰も参加していないときの
社会厚生の増分

$$f(\{\text{サッカー場}, \text{プレイヤー}, \text{サッカー場}, \text{プレイヤー}\}) - f(\{\text{サッカー場}, \text{プレイヤー}\})$$

他の人が既に参加しているときの
社会厚生の増分

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

社会厚生（全体で選ばれたサッカー場の数）を集合関数 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ で表す

（台集合は全プレイヤーの行動全体 $E = \bigcup_{i \in N} A_i$ ）

社会厚生関数が劣モジュラとは……

$$f(\{\text{📖} \text{👮}\}) - f(\{\})$$

まだ誰も参加していないときの
社会厚生の増分

$$\geq$$

$$f(\{\text{📖} \text{👮}, \text{📖} \text{👱}\}) - f(\{\text{📖} \text{👱}\})$$

他の人が既に参加しているときの
社会厚生の増分

直感的には、劣モジュラ性はプレイヤーの行動のあいだの**負の外部性**に対応

基本的効用ゲームはポテンシャルゲーム（単調劣モジュラ f がポテンシャル関数）

定義（整合的／基本的効用ゲーム） [Vetta'02]

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} A_i$ 全プレイヤーの行動全体)

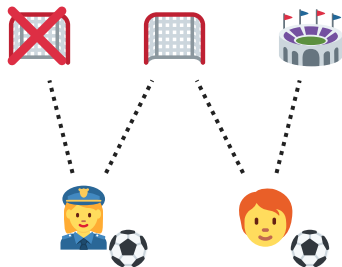
● $\sum_{i \in N} v_i(a) \leq f(\{a_1, \dots, a_n\}) \quad (\forall a \in A) \quad (\text{総効用条件})$

● $v_i(a) \geq f(\{a_1, \dots, a_n\}) - f(\{a_j \mid j \in N \setminus \{i\}\}) \quad (\forall i \in N, a \in A)$
(限界貢献条件)

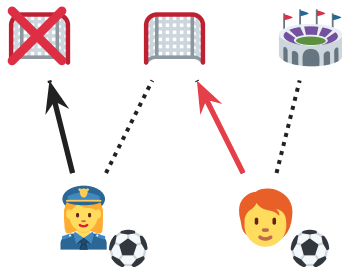
これら両方を満たすゲームを**整合的効用ゲーム** (valid utility game) と呼ぶ

さらに限界貢献条件が等号で成り立つとき**基本的効用ゲーム** (basic utility game) と呼ぶ

最悪の均衡での社会厚生を最適な社会厚生と比較

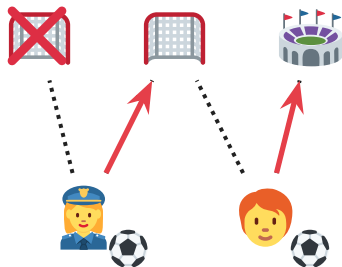


最悪の均衡での社会厚生を最適な社会厚生と比較



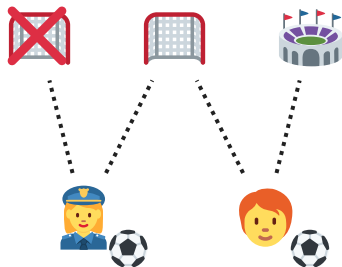
最悪の純粋ナッシュ均衡 = 1

最悪の均衡での社会厚生を最適な社会厚生と比較



最適な社会厚生 = 2

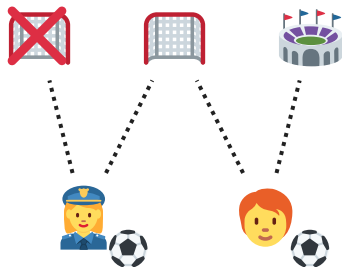
最悪の均衡での社会厚生を最適な社会厚生と比較



$$\text{PoA} := \frac{\text{最悪の純粋ナッシュ均衡}}{\text{最適な社会厚生}} = \frac{1}{2}$$

(price of anarchy)

最悪の均衡での社会厚生を最適な社会厚生と比較



$$\text{PoA} := \frac{\text{最悪の純粋ナッシュ均衡}}{\text{最適な社会厚生}} = \frac{1}{2}$$

(price of anarchy)

定理 [Vetta 2002]

基本的効用ゲームにおける純粋ナッシュ均衡の $\text{PoA} \geq 0.5$

局所探索の近似保証とほぼ同じ証明で PoA 下界が示せる

定理 [Vetta 2002]

基本的効用ゲームにおける純粋ナッシュ均衡の $\text{PoA} \geq 0.5$

証明 任意の純粋ナッシュ均衡 $a \in A$ と最適解 $a^* \in \operatorname{argmax}_{a' \in A} f(a')$ について

$X = \{a_1, \dots, a_n\}$, $X^* = \{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ とする

純粋ナッシュ均衡とポテンシャル関数の定義より

$$f(X - a_i + a_i^*) - f(X) = v_i(a_i^*, a_{-i}) - v_i(a) \leq 0 \quad (\forall i \in N)$$

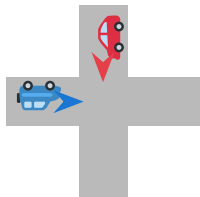
前述の補題から $0 \geq \sum_{i \in N} \{f(X - a_i + a_i^*) - f(X)\} \geq f(X^*) - 2f(X)$

よって $f(X) \geq \frac{1}{2}f(X^*)$, すなわち $\text{PoA} \geq \frac{1}{2}$

□

1. 局所探索とその近似保証
2. 局所解と均衡の対応
- 3. 相関均衡の近似的最適性**
4. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡
5. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム

交差点に進入する2台の車🚗と🚗がそれぞれ進むか停まるか決める



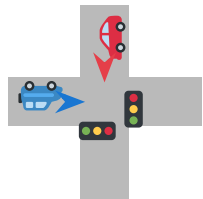
		🚗	
		進	停
🚗	進	0 0	4 3
	停	3 4	1 1

ナッシュ均衡

誰も逸脱しても期待利得が
改善しない安定した状態

- (進, 停)
- (停, 進)
- それぞれ独立に確率 $1/2$ ずつ

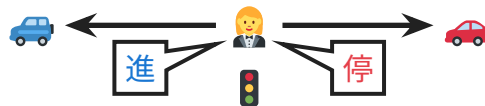
仲介者（交通信号など）によってプレイヤーたちの行動が任意に相関



			
		進	停
	進	0 0	4 3
	停	3 4	1 1

相関均衡

仲介者  が各プレイヤーに行動推薦



cf. ナッシュ均衡では各自独立に行動選択

ナッシュ均衡を含む無限個存在

例) (進, 停) と (停, 進) を確率 $1/2$ ずつ

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{🚗}, \text{🚗}\}$

A_i プレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A_i = \{\text{進}, \text{停}\}$

$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 行動の組 (action profile) 全体の集合

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ プレイヤー $i \in N$ の効用関数

$v_{\text{🚗}}(\text{進}, \text{停}) = 4$

定義

行動の組の分布 $\pi \in \Delta(A)$ が相関均衡

$a_{-i} = (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ i 以外の行動の組

$\triangleq$ 任意のプレイヤー $i \in N$ と逸脱 $\phi: A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(\phi(a_i), a_{-i})] \leq \mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(a)] \quad (\text{逸脱しても期待利得が改善しない})$$

※ この定義において π を直積分布に制限すれば、ナッシュ均衡の定義に一致

定義

行動の組の分布 $\pi \in \Delta(A)$ が相関均衡

⇔ 任意のプレイヤー $i \in N$ と逸脱 $\phi: A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(\phi(a_i), a_{-i})] \leq \mathbb{E}_{a \sim \pi} [v_i(a)] \quad (\text{逸脱しても期待利得が改善しない})$$

	進	停
進	0, 0	4, 3
停	3, 4	1, 1

前頁の相関均衡の例は以下のような分布 $\pi \in \Delta(A)$

$$\pi(\text{進}, \text{停}) = 1/2, \quad \pi(\text{停}, \text{進}) = 1/2$$

どのような ϕ を使っても期待利得は非増加

例) $\phi(\text{進}) = \text{停}, \phi(\text{停}) = \text{停}$ を使うと 3.5 から 2 へ減少

定理 [Vetta 2002, Roughgarden'15]

整合的効用ゲームにおける相関均衡の $\text{PoA} \geq 0.5$

証明 任意の相関均衡 $\pi \in \Delta(A)$ と最適解 $a^* \in \arg\max_{a \in A} f(a)$ について

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{a \sim \pi} [f(a)] &\geq \mathbb{E}_{a \sim \pi} \left[\sum_{i \in N} v_i(a) \right] \geq \mathbb{E}_{a \sim \pi} \left[\sum_{i \in N} v_i(a_i^*, a_{-i}) \right] \\ &\geq \mathbb{E}_{a \sim \pi} \left[\sum_{i \in N} \{f(a_i^*, a_{-i}) - f(a_{-i})\} \right] \geq f(a^*) - \mathbb{E}_{a \sim \pi} [f(a)] \end{aligned}$$

記法の濫用により

$$f(a) \triangleq f(\{a_1, \dots, a_n\})$$

$$f(a_{-i}) \triangleq f(\{a_j \mid j \in N \setminus \{i\}\})$$

と表記

不等号はそれぞれ総効用条件、相関均衡の定義、限界貢献条件、劣モジュラ性と単調性より

ゆえに $2 \mathbb{E}_{a \sim \pi} [f(a)] \geq f(a^*)$, すなわち $\text{PoA} \geq 1/2$

□

定義

ゲーム $(N, (A_i)_{i \in N}, (v_i)_{i \in N})$ が (λ, μ) -smooth

$$\triangleq \forall a, a^* \in A: \underbrace{\sum_{i \in N} v_i(a_i^*, a_{-i})}_{\text{各プレイヤー } i \text{ が行動 } a_i^* \text{ へと逸脱}} \geq \lambda \underbrace{f(a^*)}_{\text{social welfare } a^* \text{ による}} - \mu \underbrace{f(a)}_{\text{social welfare } a \text{ による}}$$

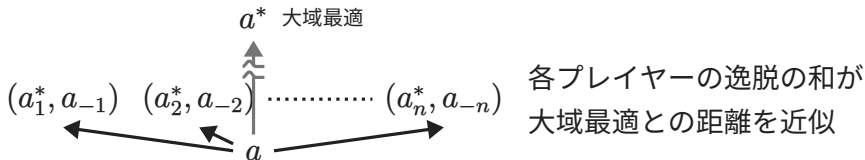
A_i 行動の集合 ($i \in N$)

$A := \prod_{i \in N} A_i$

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ 利得関数

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 社会厚生

$(\sum_i v_i(a) \leq f(a))$



定理 [Roughgarden'15]

(λ, μ) -smooth game において相関均衡の $\text{PoA} \geq \lambda/(1 + \mu)$

1. 局所探索とその近似保証
2. 局所解と均衡の対応
3. 相関均衡の近似的最適性
- 4. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡**
5. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム

休日一緒に出かけたい  と  がそれぞれ行き先を決める

 は海  に行きたいが、 は山  に行きたい

			
		海 	山 
	海 	4 3	1 1
	山 	0 0	3 4

行きたい場所 → +1 点

同じ場所 → それぞれ +3 点ずつ

ベイジアンゲーム (不完備情報ゲーム + 共有事前分布) [Harsanyi'67] 28/ 49

各プレイヤーのタイプ (好み) が共有された事前分布に従って決まるゲーム

 と  はそれぞれ確率 1/2 で海  派、確率 1/2 で山  派

(互いに相手のタイプは知らないが分布は知っている)

		確率 1/4	
		  派	
  派	海 	4 4	1 0
	山 	0 1	3 3

		確率 1/4	
		  派	
  派	海 	4 3	1 1
	山 	0 0	3 4

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👤}\}$

A_i プレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$A_1 = A_2 = \{\text{👮}, \text{👤}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_1 = \Theta_2 = \{\text{👮派}, \text{👤派}\}$

$A = \prod_{i \in N} A_i$ 行動の組全体の集合, $\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$ タイプの組全体の集合

$\rho \in \Delta(\Theta)$ タイプの組の事前分布 (共有知識)

$\rho(\text{👮派}, \text{👮派}) = 1/4$

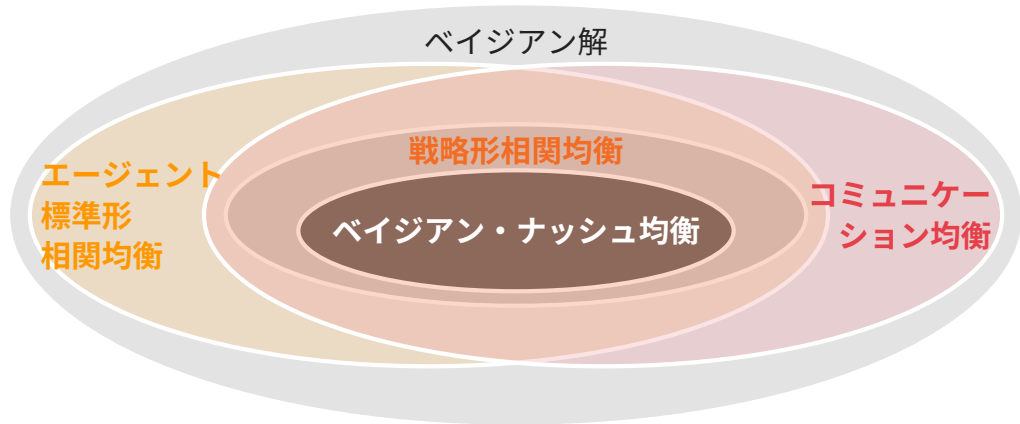
$v_i: \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ プレイヤー $i \in N$ の効用関数

$v_1(\text{👮派}, \text{👮派}; \text{👮}, \text{👤}) = 1$

1 タイプの組 $\theta \sim \rho$ が生成され、各 $i \in N$ が自分のタイプ θ_i を知る

2 各 $i \in N$ は他人のタイプ θ_{-i} を知らないまま行動 $a_i \in A_i$ を選択

ベイズ相関均衡（ベイジアンゲームにおける相関均衡）には
複数の自然な定義があり、それぞれ異なる情報交換の仕組みをもつ

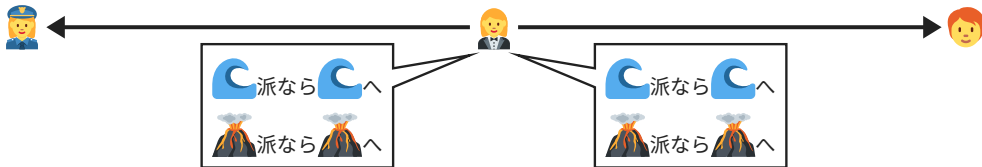


ベイジアンゲームの戦略形

タイプから行動への写像 $s_i: \Theta_i \rightarrow A_i$ (戦略と呼ぶ) を一つの行動と解釈
各プレイヤーは戦略全体 $S_i := A_i^{\Theta_i}$ から戦略を一つ選択

仲介者  は各プレイヤーに private channel でタイプごとの行動を推薦

← 推薦から逸脱するインセンティブがない

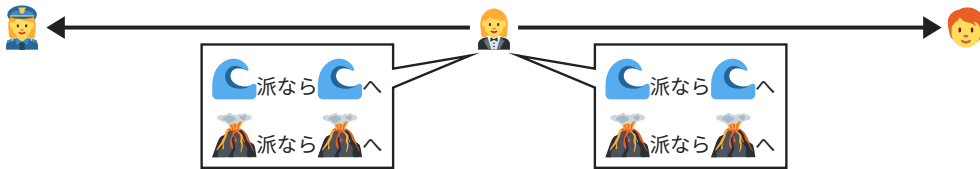


定義

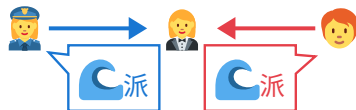
分布 $\sigma \in \Delta(S_1 \times \cdots \times S_n)$ が戦略形相関均衡であるとは,

任意のプレイヤー $i \in N$ と任意の戦略の逸脱 $\phi_{\text{SF}}: S_i \rightarrow S_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n))] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; \phi_{\text{SF}}(s_i)(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}))] \right]$$

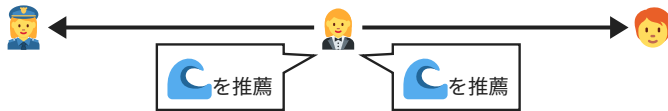


- 1 仲介者  は各プレイヤーの**真の**タイプを観測



- 2 仲介者  は各プレイヤーに private channel で行動を推薦

← 推薦から逸脱するインセンティブがない



仲介者  はタイプの組に基づいて推薦 (cf. SFCE は戦略表現性 (次頁) あり)

定義

分布 $\pi \in \Delta(A)^\Theta$ がベイズ解であるとは,

任意のプレイヤー $i \in N$ と任意の推薦後の逸脱 $\phi: \Theta_i \times A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [v_i(\theta; a)] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [v_i(\theta; \phi(\theta_i, a_i), a_{-i})] \right]$$

分布 $\pi \in \Delta(A)^\Theta$ が**戦略表現性**をもつ (strategy-representable)

⇔ ある戦略の組の分布 $\sigma \in \Delta(S_1 \times \cdots \times S_n)$ が存在して

$$\Pr_{s \sim \sigma} (s_1(\theta_1) = a_1, \dots, s_n(\theta_n) = a_n) = \pi(a \mid \theta) \quad (\forall \theta \in \Theta, a \in A)$$

戦略の組の分布としては表現できない

確率 1/2		 	
			
		0	0
		0	0

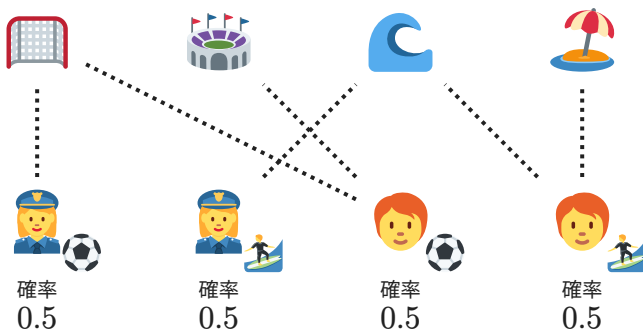
確率 1/2		 	
			
		0	0
		0	0

が派なら
はを推薦

が派なら
はを推薦

1. 局所探索とその近似保証
2. 局所解と均衡の対応
3. 相関均衡の近似的最適性
4. 既存研究：ベイジアンゲームにおける相関均衡
- 5. 本研究：劣モジュラ社会厚生をもつベイジアンゲーム**

タイプごとに別のプレイヤーとみなして社会厚生関数を定義



Q

ベイズ相関均衡の各概念のあいだで PoA の保証に差はあるか？

タイプごとに別のプレイヤーとみなして社会厚生関数を定義



Q

ベイズ相関均衡の各概念のあいだで PoA の保証に差はあるか？

タイプごとに別のプレイヤーとみなして社会厚生関数を定義



確率 $1/4$

👮は👤のタイプを知らない

👤は👮のタイプを知らない

Q

ベイズ相関均衡の各概念のあいだで PoA の保証に差はあるか？

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ プレイヤーの集合

$N = \{\text{👮}, \text{👤}\}$

Θ_i プレイヤー $i \in N$ のタイプの集合 (有限)

$\Theta_{\text{👮}} = \Theta_{\text{👤}} = \{\text{⚽}, \text{🏊}\}$

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限) $A_{\text{👮}}^{\text{⚽}} = \{\text{🏠}, \text{🏟️}\}$

$\Theta = \prod_{i \in N} \Theta_i$ タイプの組全体の集合

$\rho \in \Delta(\Theta)$ タイプの組の事前分布

$\rho(\text{⚽}, \text{⚽}) = 1/4$

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ 各プレイヤー $i \in N$ の効用関数

ただし $A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は実現しうる行動の組全体の集合

通常の設定

A_i プレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$v_i: \Theta \times A \rightarrow \mathbb{R}$ プレイヤー $i \in N$ の効用関数

(θ_i, a_i) を一つの行動とみなす   $A_i := \bigcup_{\theta_i} A_i^{\theta_i}$ とし, $\forall \theta'_i \neq \theta_i$ の行動を無視

タイプ依存行動集合の設定

$A_i^{\theta_i}$ タイプ $\theta_i \in \Theta_i$ をもつプレイヤー $i \in N$ の行動の集合 (有限)

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ 各プレイヤー $i \in N$ の効用関数

ただし $A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は実現しうる行動の組全体の集合

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ 各 $i \in N$ の効用関数 ($A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は行動の組全体)

$f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i}$ 全プレイヤーの行動全体)

$v_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ 各 $i \in N$ の効用関数 ($A = \prod_{i \in N} \left(\bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i} \right)$ は行動の組全体)
 $f: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ 非負単調劣モジュラ関数 ($E = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i}$ 全プレイヤーの行動全体)

定義 (ベイジアン整合的効用ゲーム) [Fujii'25]

- $\sum_{i \in N} v_i(a) \leq f(\{a_1, \dots, a_n\}) \quad (\forall a \in A) \quad (\text{総効用条件})$
- $v_i(a) \geq f(\{a_1, \dots, a_n\}) - f(\{a_j \mid j \in N \setminus \{i\}\}) \quad (\forall i \in N, a \in A)$
(限界貢献条件)

両方成り立つ場合にベイジアン整合的効用ゲーム,
さらに限界貢献条件が等号で成り立つときベイジアン基本的効用ゲームと呼ぶ

均衡の集合 $\Pi \subseteq \Delta(A)^\Theta$ に対して PoA と Price of Stability (PoS) は

最悪の均衡による
社会厚生の値

$$\text{PoA}_\Pi \triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]}$$

社会厚生の最大値

$$A^\theta \triangleq \prod_{i \in N} A_i^{\theta_i}$$

記法の濫用により

$$f(a) \triangleq f(\{a_1, \dots, a_n\}) \text{ と表記}$$

完備情報との違い

最適な行動 a_i^* が他プレイヤーのタイプ θ_{-i} に依存

均衡の集合 $\Pi \subseteq \Delta(A)^\Theta$ に対して PoA と Price of Stability (PoS) は

最悪の均衡による
社会厚生の値

$$\text{PoA}_\Pi \triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]}$$

社会厚生の最大値

最良の均衡による
社会厚生の値

$$\text{PoS}_\Pi \triangleq \frac{\sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]}$$

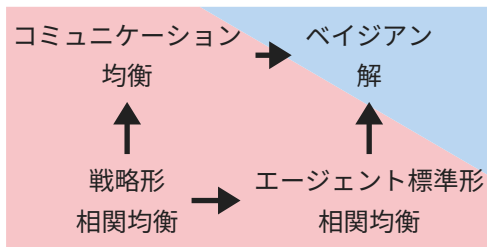
社会厚生の最大値

完備情報との違い

最適な行動 a_i^* が他プレイヤーのタイプ θ_{-i} に依存

PoA の上下界

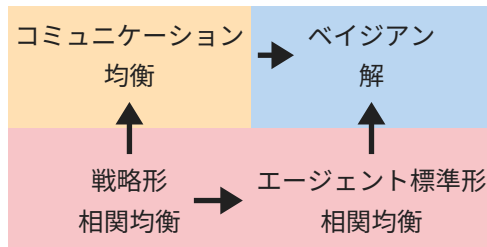
$$\inf \text{PoA} \in [0.316, 0.441]$$



$$\inf \text{PoA} = 0.5$$

PoS の上下界

$$\inf \text{PoS} \in [1 - 1/e, 0.8] \quad \inf \text{PoS} = 1$$



$$\inf \text{PoS} = 1 - 1/e$$

PoS 結果はより強い条件 (basic utility) 下

※ 上記の結果はタイプ事前分布 ρ のプレイヤーごとの独立性を仮定

最悪の均衡による

社会厚生の値

$$\text{PoA}_{\Pi} \triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^{\theta}} f(a^*) \right]}$$

社会厚生の最大値

社会厚生不值

$$\rho_{\text{оАп}}$$

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^\theta} f(a^*) \right]$$

最適な戦略の組による

社会厚生不值

社会厚生 の 最大値

完備情報の
場合に帰着

SR gap

$$\begin{aligned}
 \text{PoA}_{\Pi} &\triangleq \frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a^* \in A^{\theta}} f(a^*) \right]} \\
 &= \underbrace{\frac{\inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [f(a)] \right]}{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}_{\text{完備情報の場合に帰着}} \cdot \underbrace{\frac{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a \in A^{\theta}} f(a) \right]}}_{\text{SR gap}}
 \end{aligned}$$

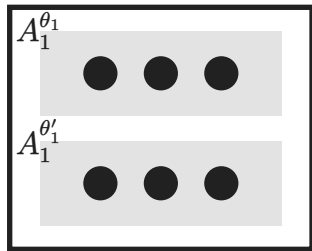
$S_i = \prod_{\theta_i \in \Theta_i} A_i^{\theta_i}$ 各 $i \in N$ の戦略全体の集合

$s_i \in S_i$ はタイプ θ_i ごとに行動 $s_i(\theta_i)$ を決定

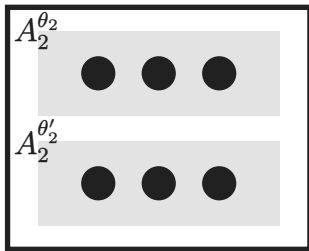
$S \triangleq \prod_{i \in N} S_i, \quad s(\theta) \triangleq (s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n))$

最適な戦略の組による
社会厚生値

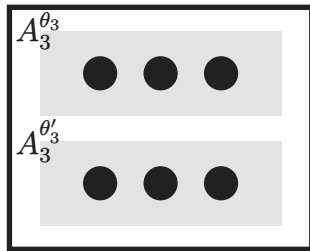
プレイヤー 1



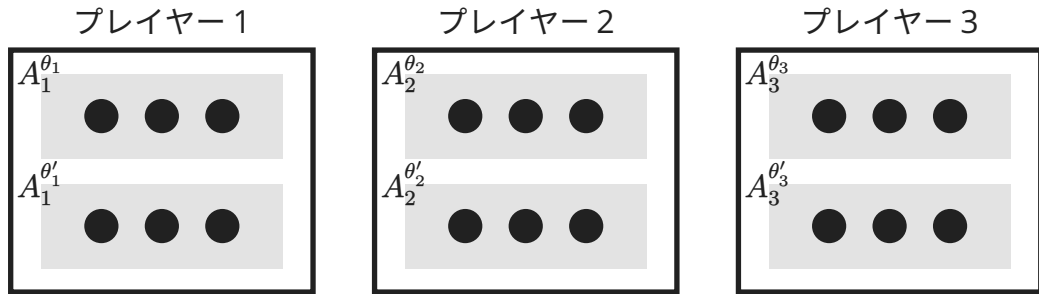
プレイヤー 2



プレイヤー 3

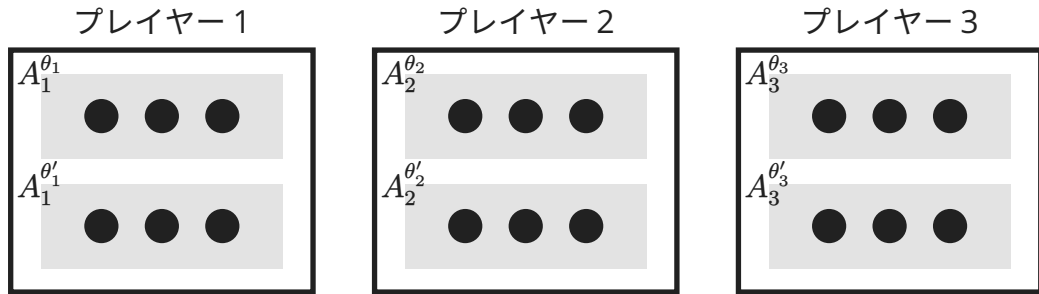


プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定



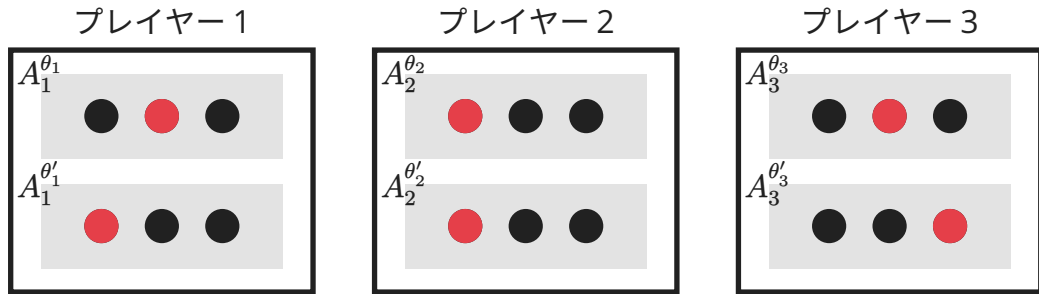
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$



プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

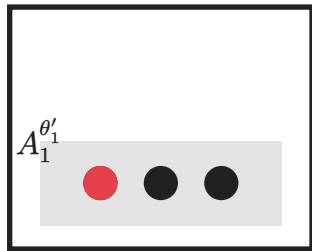
$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$



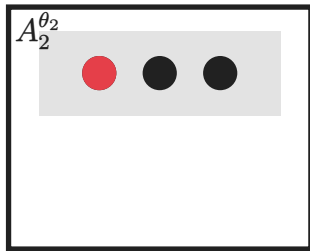
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

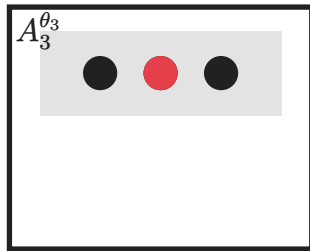
プレイヤー 1



プレイヤー 2

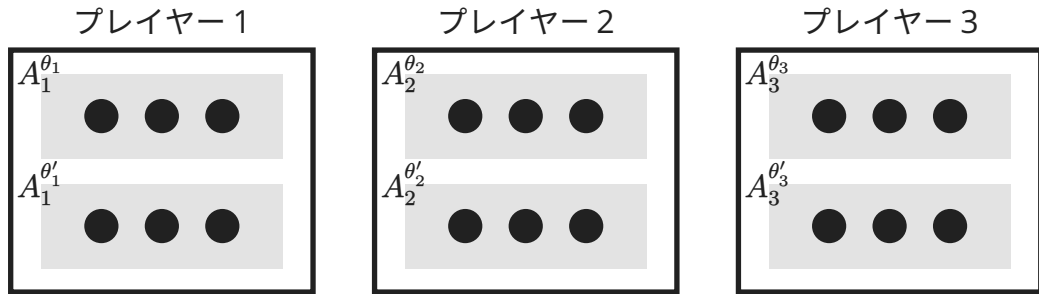


プレイヤー 3



プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

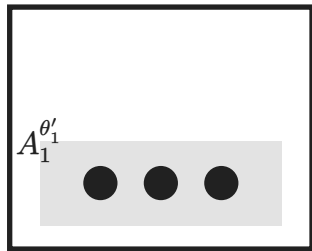
$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$



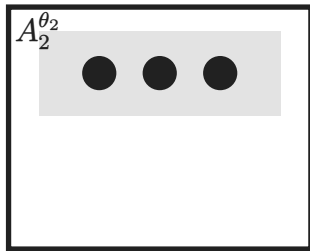
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

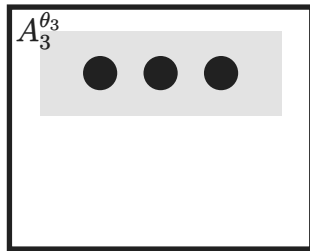
プレイヤー 1



プレイヤー 2



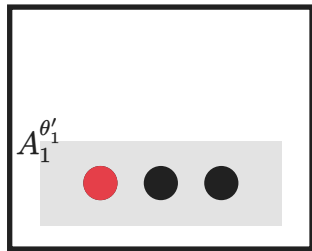
プレイヤー 3



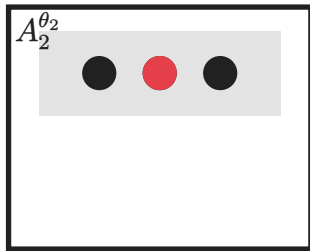
プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

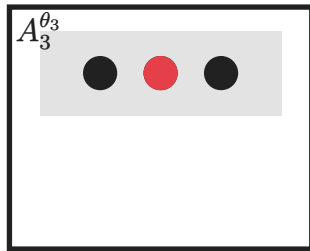
プレイヤー 1



プレイヤー 2



プレイヤー 3



プレイヤーごとに一つのブロックが事前分布に従って決定

$$\text{SRgap}_{f,\rho} \triangleq \frac{\text{各ブロックから要素を一つ選んでからブロックがランダムに選ばれる}}{\text{ブロックがランダムに選ばれてから各ブロックから要素を一つ選ぶ}}$$

Q 非負単調劣モジユラ関数における SR gap の最小値は？

$$\text{SRgap}_{f,\rho} = \frac{\max_{s^* \in S} \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} [f(s^*(\theta))]}{\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\max_{a \in A^\theta} f(a) \right]}$$

- 事前分布 ρ がプレイヤーごとに**独立**な場合

$$\inf_{f, \rho: \text{独立}} \text{SRgap}_{f,\rho} = 1 - 1/e \quad \leftarrow \text{相関ギャップ} + \text{弱負回帰 [Qiu-Singla'22]}$$

- 事前分布 ρ は**相関してもよい**場合（任意の分布）

$$\inf_{f,\rho} \text{SRgap}_{f,\rho} = \Theta(1/\sqrt{n}) \quad \leftarrow \text{多重線形拡張} + \text{要素を大小に分けて解析}$$

定理

ρ が独立なら $\text{SRgap}_{f,\rho} \geq 1 - 1/e$ であり、この下界は tight

下界

相関ギャップ + 弱負回帰（負の相関の一種）

上界



最適な社会厚生: n

高確率で完全マッチングが存在

最適な戦略の組: $\approx (1 - 1/e)n$

各資源が選ばれる期待確率を上から抑えられる

定理

$$\inf_{f, \rho} \text{SRgap}_{f, \rho} = \Theta(1/\sqrt{n})$$

下界

複雑

上界

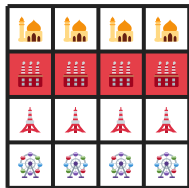
$$\Theta_1 = \dots = \Theta_n = [n]^k$$

$$j \sim [k] \text{ かつ } \ell_1, \dots, \ell_k \sim [n]$$

タイプ $\{(\ell_1, \dots, \ell_{j-1}, t, \ell_{j+1}, \dots, \ell_k) \mid t \in [n]\}$ を n 人のプレイヤーにランダムに割り当てる



1 番目の行動



2 番目の行動

 $n = 4, k = 2$ の場合

$E = [k] \times [n]$ 資源の集合 行動の数は k ずつ
タイプ ℓ の h 番目の行動は $(h, \ell_h) \in E$ を選ぶこと

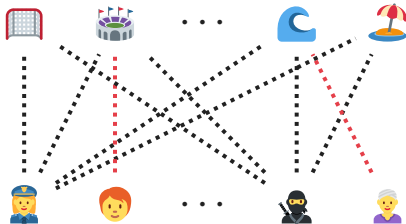
$k = \sqrt{n}$ とすると

最適な社会厚生: n

最適な戦略の組: $\leq k + n/k = 2\sqrt{n}$

命題

独立な ρ をもつ例で $\text{PoA}_{\text{BS}} \leq \frac{1 - 1/\sqrt{e}}{3/2 - 1/\sqrt{e}} \approx 0.4403$



奇数プレイヤー：全ての資源に接続

偶数プレイヤー：ランダムに一つの資源に接続

奇数プレイヤーが偶数プレイヤーに優先

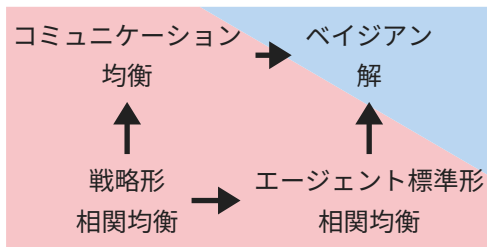
悪いベイジアン解:

プレイヤー $(2k - 1)$ にプレイヤー $2k$ の行動を推薦

最適: $\approx \underbrace{n/2}_{\text{奇数}} + \underbrace{(1 - 1/\sqrt{e})n}_{\text{偶数}}, \quad \text{ベイジアン解: } \approx (1 - 1/\sqrt{e})n$

PoA の上下界

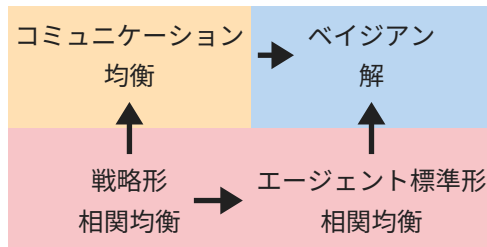
$$\inf \text{PoA} \in [0.316, 0.441]$$



$$\inf \text{PoA} = 0.5$$

PoS の上下界

$$\inf \text{PoS} \in [1 - 1/e, 0.8] \quad \inf \text{PoS} = 1$$



$$\inf \text{PoS} = 1 - 1/e$$

PoS 結果はより強い条件 (basic utility) 下

※ 上記の結果はタイプ事前分布 ρ のプレイヤーごとの独立性を仮定

- Robert J. Aumann. Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1(1):67–96, 1974.
- Marshall L. Fisher, George L. Nemhauser, and Laurence A. Wolsey. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions—II. *Mathematical Programming Study*, 8:73–87, 1978.
- Françoise Forges. An approach to communication equilibria. *Econometrica*, 54(6):1375–1385, 1986.
- Françoise Forges. Five legitimate definitions of correlated equilibrium in games with incomplete information. *Theory and Decision*, 35(3):277–310, 1993.
- Kaito Fujii. Approximation guarantees of local search algorithms via localizability of set functions. In *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning (ICML 2020)*, PMLR 119:3327–3336, 2020.
- Kaito Fujii. The power of mediators: Price of anarchy and stability in Bayesian games with submodular social welfare. In *Proceedings of the 26th ACM Conference on Economics and Computation (EC 2025)*, p. 251, 2025. Full version: arXiv:2506.02655.
- John C. Harsanyi. Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III. *Management Science*, 14(3):159–182, 1967; 14(5):320–334 and 14(7):486–502, 1968.
- Dov Monderer and Lloyd S. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14(1):124–143, 1996.
- Roger B. Myerson. Optimal coordination mechanisms in generalized principal–agent problems. *Journal of Mathematical Economics*, 10(1):67–81, 1982.
- Frederick Qiu and Sahil Singla. Submodular dominance and applications. In *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques (APPROX/RANDOM 2022)*, LIPIcs 245, 44:1–44:21, 2022.
- Tim Roughgarden. Intrinsic robustness of the price of anarchy. *Journal of the ACM*, 62(5), Article 32, 2015.
- Adrian Vetta. Nash equilibria in competitive societies, with applications to facility location, traffic routing and auctions. In *Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2002)*, pp. 416–425, 2002.
- Illustrations: “Twemoji” is licensed under CC BY 4.0.

ベイジアンゲームのエージェント標準形

各プレイヤーをタイプごとに異なる仮想的なプレイヤーとみなす
実現したタイプに対応する仮想的プレイヤーだけがゲームに参加する

例) 仮想的プレイヤー 4 人 (👮, 🌊), (👮, 🏔), (👨, 🌊), (👨, 🏔) のうち 2 人がゲームに参加

戦略形相関均衡との違い：

各プレイヤーは自分のタイプ以外への推薦は観測しない

※ 仲介者 👤 によって実現する自然なシナリオは知られていない

定義

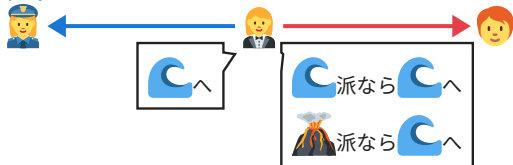
分布 $\sigma \in \Delta(S_1 \times \cdots \times S_n)$ がエージェント標準形相関均衡であるとは、
任意のプレイヤー $i \in N$ と任意のタイプごとの逸脱 $\phi: \Theta_i \times A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; s_1(\theta_1), \dots, s_n(\theta_n))] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{s \sim \sigma} [v_i(\theta; \phi(\theta_i, s_i(\theta_i)), s_{-i}(\theta_{-i}))] \right]$$

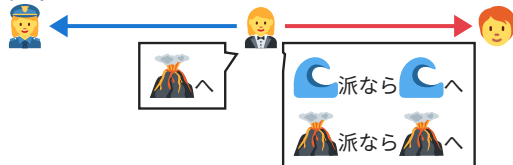
ANFCE だが SFCE でない例

4/9

確率 0.5 で



確率 0.5 で



この分布では、と (派) は常に同じ場所を推薦される

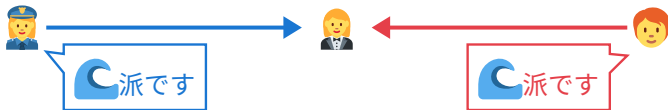
この分布は SFCE ではない： (派) は常にを推薦されるが、 (派) への推薦を観測すれば、と同じ行動へ逸脱できる

この分布は ANFCE： (派) は自分への推薦（常に）だけを観測するため、逸脱しても得しない

仲介者  とプレイヤーたちの双方向の情報交換で実現

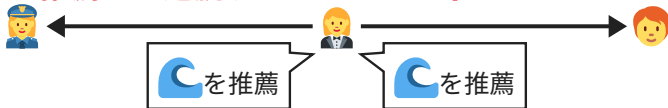
- 1 各プレイヤーは仲介者  に private channel でタイプを報告

← 嘘のタイプを報告するインセンティブがない



- 2 仲介者  は private channel で各プレイヤーに行動を推薦

← 推薦から逸脱するインセンティブがない



定義

分布 $\pi \in \Delta(A)^\Theta$ がコミュニケーション均衡であるとは,

任意のプレイヤー $i \in N$, 嘘のタイプ報告 $\psi: \Theta_i \rightarrow \Theta_i$,

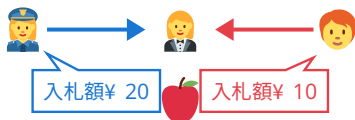
推薦された行動からの逸脱 $\phi: \Theta_i \times A_i \rightarrow A_i$ について

$$\mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\theta)} [v_i(\theta; a)] \right] \geq \mathbb{E}_{\theta \sim \rho} \left[\mathbb{E}_{a \sim \pi(\psi(\theta_i), \theta_{-i})} [v_i(\theta; \phi(\theta_i, a_i), a_{-i})] \right]$$

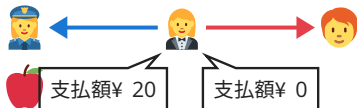
- 1 プレイヤー i が真のタイプ θ_i に基づきタイプ $\psi(\theta_i)$ を報告
- 2 報告されたタイプの組に基づき仲介者が $a \sim \pi(\psi(\theta_i), \theta_{-i})$ を推薦
- 3 プレイヤー i が推薦された行動 a_i に基づき行動 $\phi(\theta_i, a_i)$ に逸脱

メカニズムデザイン

- 1 各プレイヤーがタイプを報告
← 嘘をついても得しない



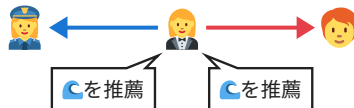
- 2 結果を決定
← この決定は逸脱不可

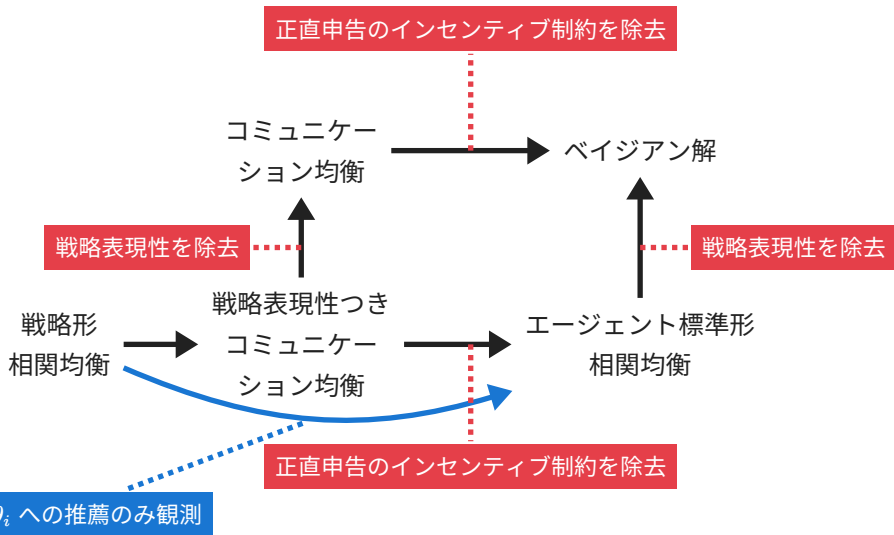


相関均衡

- 1 タイプなし（完備情報）

- 2 行動を推薦
← 逸脱しても得しない





命題

ρ が独立なら $\text{PoA}_{\text{Com.Eq.}} \geq 0.5$

(戦略表現性ギャップを用いた保証を改善)

証明の流れは完備情報 (non-Bayesian) の場合と同じ

プレイヤー $i \in N$ が $\theta' \sim \rho$ を独自に生成しタイプ θ'_i を報告する逸脱を考える
(コミュニケーション均衡の条件)

ρ の独立性を用いて、不等式中の真のタイプ θ_i と嘘のタイプ θ'_i を入れ替え

注意

同じ結果がエージェント標準形相関均衡にも成り立つ